MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

C. IV.

MATRIXSZÁMÍTÁS

ÍRTA:
DR. LOVASS-NAGY VIKTOR

ÖTÖDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1977

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:

DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS,
DR. MATH. SC.

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR,
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS,
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:

GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
K 038 954

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1977

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI:

A. I. **Középiskolai matematika** (Ötödik kiadás)
A. II. **Egyváltozós elemi függvények** (Harmadik kiadás)
A. III. **Differenciálszámítás** (Harmadik kiadás)
A. IV. **Határozatlan integrál** (Negyedik kiadás)
A. V.* **Határozott integrál (Első rész)** (Negyedik kiadás)
A. V.** **Határozott integrál (Második rész)**
A. VI. **Többváltozós függvények és differenciálásuk** (Negyedik kiadás)
A. VII. **Többváltozós függvények integrálása** (Második kiadás)
A. VIII. **Taylor-sorok** (Harmadik kiadás)
A. IX. **Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek** (Negyedik kiadás)
A. X. **A logarléc** (Hatodik kiadás)

B.

B. I—II—III. **Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája.)** Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B. IV. **Komplex függvénytan** (Harmadik kiadás)
B. V, **Numerikus és grafikus közelítő módszerek** (Második kiadás)
B. VI. **Végtelen sorozatok, sorok szorzatok** (Harmadik kiadás)
B. VII.* **Közönséges differenciálegyenletek (Első rész)** (Ötödik kiadás))
B. VII.** **Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)** (Harmadik kiadás)
B. VIII. **Parciális differenciálegyenletek** (Második kiadás)

C.

C. I. **Operátorszámítás. Speciális függvények** (Második kiadás)
C. II. **Variációszámítás** (Harmadik kiadás)
C. III. **Integrálegyenletek** (Második kiadás)
C. IV. **Matrixszámítás** (Negyedik kiadás)
C. V. **Valószínűségszámítás** (Második kiadás)
C. VI. **Matematikai összefoglaló** (Harmadik kiadás)
C. VII. **Matematikai programozás** (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk)

C. IV.

MATRIXSZÁMÍTÁS

ÍRTA:

DR. LOVASS-NAGY VIKTOR

OKL. GÉPÉSZMÉRNÖK

A KHARTOUMI EGYETEM TANÁRA

ÖTÖDIK KIADÁS

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

A PÉLDÁK ANYAGÁNAK ÖSSZEÁLLÍTÁSÁBAN KÖZREMŰKÖDÖTT:

SZEREDAI ERIK

EGYETEMI ADJUNKTUS

★

E KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTÉK:

DR. REUSS ENDRE

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA,
EGYETEMI TANÁR

DR. RÓZSA PÁL

OKL. GÉPÉSZMÉRNÖK, KANDIDÁTUS
EGYETEMI TANÁR

KORRIGÁLTA:

SZABÓ ISTVÁN

TUDOMÁNYOS KUTATÓ

© *Dr. Fazekas Ferenc, Dr. Lovass-Nagy Viktor, 1972*

ISBN 963 17 2560 X

Kiadását az oktatási miniszter rendelte el

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2–3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter–Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt – magas színvonalára való tekintettel – elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben dr. *Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtőmunkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével – egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokássá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag egyszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

---

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

A *B.* és *C. rész füzeteiben* – az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva – nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem – példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő – eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével s gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink oktatóinak és hallgatóinak ajánljuk*. Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1. *A szerkesztő*

A SOROZAT MÁSODIK ÉS HARMADIK KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

Közel nyolc év munkájával – néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve – az eredeti terv szerint sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 25 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak, 1958 nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása.

A második kiadású kötetek gyors elfogyása – éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével, a héjelmélet modern, tenzorszámítási tárgyalásmódjával kapcsolatos bővítés után – kézzelfoghatóan bizonyítja a sorozat fejlesztésére, korszerűsítésére 1958-ban kitűzött célok és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítés helyességét.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, továbbra is kérve ehhez a minisztérium, a kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk áldozatkész, buzdító támogatását.

Budapest, 1958. szept. 1. és 1964. júl. 15. *A szerkesztő*

ELŐSZÓ A SOROZAT NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A középiskolai és a műegyetemi tanterv újabban végbement jelentős változása, valamint az elektronikus számítástechnika széles körű előretörése folytán ez évben megindulhatott az előző kiadások során a hazai műszaki olvasótáborban közismertté és kedveltté vált könyvsorozatunk alapos felfrissítésének és korszerűsítésének több éves periódusa. Ez számos kötetünk kisebb-nagyobb átdolgozásával, egyesek bővítésével, esetleg szűkítésével és néhány, eddig is szorgalmazott új kötet megjelenésével fog megvalósulni, karaink és a kiadó örvendetes támogatásával. Sorozatunk immár közel 2 évtizedes eleven életútja, gazdag oktatási és kutatási tapasztalataink, az olvasók és az illetékesek ügypártolása kellemessé teszik számunkra ezt a nagy munkát.

Lectori salutem!

Budapest, 1971. május 15. *A szerkesztő*

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

Jelen kötet szerzőjét munkája során a következő, kettős célkitűzés vezette:

Először: a műszaki problémák matematikai eszközökkel való megoldása iránt érdeklődő olvasó figyelmének felhívása a matrixszámítás műszaki alkalmazásából nyerhető, ez ideig még alig kiaknázott előnyökre.

Másodszor: a – jelenleg még több vonatkozásban fejlődésben levő, nem minden tekintetben a gyakorlat igényeinek megfelelően kialakult – matrixelmélet alapjainak, továbbá a műszaki alkalmazás néhány lehetőségének olyan méretében és tárgyalásmódban történő ismertetése, amely a műszaki képzettségű olvasó számára lehetővé teszi az itt közölt anyag közvetlen felhasználását, és egyszersmind alapot nyújt esetleges további elmélyülésre is.

Szerző e könyvben felhasználta *Egerváry Jenő* – nemzetközi viszonylatban úttörő jelentőségű – matrixelméleti munkáit. E munkák (dolgozatok, előadások stb.) anyagának átengedéséért, valamint a könyv megírása során nyújtott támogatásáért a szerző ezúton is kifejezésre kívánja juttatni köszönetét. E helyen is köszönet illeti továbbá *Szeredai Eriket*, akitől a numerikus példák egy része származik, továbbá a könyv lektorait és végül, de nem utolsósorban a sorozat szerkesztőjét számos értékes megjegyzésükért, amelyekkel kétségen kívül hozzájárultak a könyv egyes fogyatékosságainak csökkentéséhez.

Budapest, 1956. február 4.

Dr. Lovass-Nagy Viktor

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

A matrixszámítás hazai történetében az utolsó évtized az elméleti kutatások fellendülésének, valamint a műszaki és egyéb alkalmazások széles kibontakozásának időszaka volt. Ezalatt sok-sok mérnökünk barátkozott meg a matrixszámítással és győződött meg jelentékeny előnyeiről, főleg a bonyolult elektromos és mechanikai rendszerek vizsgálatánál. A matematikai programozási módszerek és az elektronikus számítógépek bevonulása tudományos-műszaki életünkbe újabb lökést adott a matrixszámítás iránti érdeklődésnek.

Néhai *Egerváry* professzor és egykori iskolájának tagjai ambicionálták, hogy – szóban és írásban – megkönnyítsék a mérnököknek e szép diszciplína minél szélesebb körű alkalmazását. Hogy ezt nem minden eredmény nélkül tették, bizonyítja e kötet második kiadása is.

Az új kiadás a régihez képest egyrészt *néhány kisebb, de nem lényegtelen bővítésben* különbözik. Ilyen bővítés történt pl. a hipermatrixok egyes speciális típusaival, továbbá a matrixfüggvények kanonikus előállításával, végül a matrixinvertálás egyes speciális kérdéseivel kapcsolatban.

Másrészt – a sorozat ilyen irányú hiányosságának átmeneti kiküszöbölésére – egy *matematikai programozási függelékkel bővült* a kötet. Ez egyelőre csak a lineáris programozás matematikai alapjaira, a közönséges és módosított szimplex módszerre, valamint az integer és a kvadratikus programozás alapkérdéseire tudott kiterjeszkedni. Az említett hiány végleges kiküszöbölése, vagyis a matematikai programozásról, sok nagyfontosságú speciális problémájáról teljes körkép felvázolása, előbb-utóbb önálló kötetet fog igényelni.

Hálás köszönetet mondunk e helyen is a függelék lektorainak, *dr. Kádas Kálmán* egyetemi tanár, dékán úrnak, valamint *dr. Seitz Károly* adjunktus kollégának, értékes észrevételeikért.

Szeretnők remélni, hogy könyvünk új, bővített kiadása még hasznosabban szolgálja majd mérnökeink elméleti továbbképzésének országos jelentőségű ügyét.

Khartoum–Budapest, 1964. március 1.

Dr. Lovass-Nagy Viktor,
Fazekas Ferenc

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK ÉS NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

Kellemes meglepetés volt számomra, hogy a kötet második kiadása kb. fél év alatt elfogyott. E tény oka kétségtelenül a műszaki körök *egyre fokozódó érdeklődése* a matrixszámítás és sokoldalú műszaki-gazdasági alkalmazásai iránt. Mint ismeretes, ezt az érdeklődést a kötet második kiadásában néhány, az alkalmazások szempontjából is fontos elméleti kiegészítéssel, valamint *Fazekas Ferenc* kollégám „*Matematikai programozás*" c. *Függelékével* igyekeztünk honorálni.

A harmadik és negyedik kiadásban, – az előzőhöz képest – csak annyi változás történt, hogy az említett *Függelék* C. VII. jelzéssel, önálló kötetként került kiadásra, a reformoktatás igényeinek és a téma népgazdasági jelentőségének megfelelően.

Örömre szolgálna, ha a kötet harmadik és negyedik kiadása *újabb híveket* toborozna a matrixszámítás kedvelőinek, alkalmazóinak és kutatóinak táborába.

Khartoum, 1965. március 1., 1971. június 1.

Dr. Lovass-Nagy Viktor

Dr. Egerváry Jenő †

kétszeres Kossuth-díjas, akadémikus,
egyetemi tanár

emlékére és munkáinak felhasználásával

TARTALOMJEGYZÉK

Első rész

A MATRIXSZÁMÍTÁS ELMÉLETÉNEK ALAPFOGALMAI

1. §. A matrixaritmetika alaptételeinek ismertetése

a) *A matrix fogalma és főbb típusai* 15

α) Alapfogalmak 15

β) Fontosabb matrixtípusok és jelöléseik 18

b) *Matrixok egyenlősége, összeadása, kivonása és szorzása* 21

α) Egyenlőség 21

β) Összeadás, kivonás 21

γ) Szorzás 22

δ) Speciális matrixtípusok szorzásánál mutatkozó sajátosságok 24

ε) A szorzás műveletével kapcsolatos egyéb megjegyzések 25

I°. Matrixszorzat előállítása a tényezők oszlop- és sorvektorainak segítségével 25

II°. Matrixszorzat asszociativitása és disztributivitása 27

III°. Háromtényezős matrixszorzat minormatrixai 28

IV°. Kvadratikus és bilineáris alakok előállítása háromtényezős matrixszorzattal 28

ζ) Kvadratikus matrix hatványozása 29

η) Skaláregyütthatós matrixpolinom 30

ϑ) Projektormatrix fogalma és hatványozása 32

ι) Tükröző matrix fogalma 32

c) *Kvadratikus matrix determinánsa és reciproka* 38

α) Kvadratikus matrix determinánsa 38

β) A determinánselméletből a későbbiek során alkalmazásra kerülő alapvető összefüggések 39

I°. A determinánsnak valamely sora vagy oszlopa szerint való kifejtésére vonatkozó azonosságok 39

II°. A determinánsnak felső k sora szerinti kifejtésére vonatkozó azonosság (Laplace-féle kifejtési szabály) 39

III°. Matrixszorzat valamely kvadratikus minormatrixának determinánsa (Cauchy—Binet-tétel) 40

IV°. A $\{\lambda E - A\}$ n-ed rendű „karakterisztikus matrix" determinánsa (Karakterisztikus determináns) 42

V°. Determináns differenciálása 43

VI°. Egy $(n+2)$-ed rendű determináns $(n+1)$-ed rendű aldeterminánsaiból képzett $D_{it}D_{jj} - D_{ij}D_{jt}$ kifejezésnek két tényező szorzataként való előállítása 44

γ) Matrixszal való osztás. Kvadratikus matrix reciprokmatrixa 45

I°. A reciprokmatrix fogalma 45

II°. Az adjungált matrix fogalma 45

III°. A reciprokmatrix kiszámítása 48

IV°. A reciprokmatrix legfontosabb tulajdonságai 48

V°. A matrix osztása 48

VI.° Eltérések a skalár- és matrixaritmetika között 49

d) *A kvadratikus matrix nyoma* 53

e) *Hipermatrixok és azokra értelmezett műveletek* 54

α) A hipermatrix fogalma 54

β) Hipermatrixok egyenlősége, összeadása, kivonása és szorzása 55
I°. Egyenlőség 55
II°. Összeadás, kivonás 55
III°. Két hipermatrix szorzata 56

γ) „2×2 típusú" hipermatrix determinánsa és inverze 57
I°. A „2×2 típusú" hipermatrix értelmezése 57
II°. „2×2 típusú" hipermatrix determinánsa 57
III°. „2×2 típusú" hipermatrix inverzének kiszámítása a blokkok inverzéből. (Aitken képletei.) 58

δ) Speciális hipermatrixtípusok 60
I°. Diagonál hipermatrixok, direkt szorzatként előállítható hipermatrixok 60
II°. Direkt szorzatok 61
III°. „$n \times n$ típusú", felcserélhető blokkokból álló hipermatrix determinánsa és inverze 64

2. §. Vektorok lineáris függése. Matrix diadikus felbontása. Matrix rangja és a rangszám alapján levonható következtetések

a) *Vektorok lineáris függése* 73

b) *Matrix diadikus felbontása* 74

c) *Matrix rangja és a rangszám alapján levonható következtetések* 80

α) Matrix rangjának fogalma és meghatározása 80

β) Matrix rangjára vonatkozó megjegyzések és tételek 82

γ) Vektorok közti lineáris összefüggések megállapítása. Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása 83

δ) Matrixszorzat eltűnéséből a rangszám segítségével levonható következtetések 86

ε) Projektormatrix diadikus felbontása 88

ζ) Hermitikus (illetve valós szimmetrikus) projektormatrixok diadikus felbontása 90

η) Általános kvadratikus matrix diadikus felbontása 92

3. §. Karakterisztikus polinom. Minimál polinom. Fokszám-redukció

a) *Karakterisztikus és minimál polinom és egyenlet* 94

α) Karakterisztikus polinom és karakterisztikus egyenlet 94

β) Minimál polinom és minimál egyenlet 96

b) *A fokszám-redukció* 101

α) A karakterisztikus polinom és a minimál polinom fokszámai közti különbség („fokszám-redukció") megállapítása 101

β) Hermitikus (illetve valós szimmetrikus) matrix minimál egyenlete csupa egyszeres gyökkel bír 102

4. §. Analitikus matrixfüggvény hatványsorának minimális fokszámú matrixpolinomra való redukálása. Matrixfüggvény kanonikus alakja egyszeres gyökkel bíró minimál egyenlet esetén

a) *Matrixfüggvény hatványsora és annak redukálása matrixpolinomra* 105

α) Matrixfüggvény definíciója végtelen hatványsorral 105

β) Matrixhatványsor redukálása matrixpolinomra egyszeres gyökkel bíró minimál polinom esetén 106
γ) A Lagrange-féle matrixpolinomok rangja 109
δ) A Lagrange-féle matrixpolinomok projektortulajdonsága és ortogonalitása 111

b) *Matrixfüggvények kanonikus előállítása* 118
α) Matrixfüggvények kanonikus előállításának alaptétele 118
β) A Lagrange-féle matrixpolinomok kiszámítása az adjungált matrix segítségével 123
γ) Matrixok kanonikus előállítása hármas matrixszorzat alakban 127
δ) Ciklikus matrix analitikus függvényének kanonikus előállítása 128
ε) Szimmetrikus ciklikus matrixok analitikus függvényeinek kanonikus előállítása Lagrange-féle matrixpolinomokkal kifejezett alakban 136
ζ) Hipermatrixok függvényeinek szemikanonikus és kanonikus előállítása 139

Második rész

A MATRIXSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

5. §. Matrixok néhány alkalmazása a háromméretű tér geometriájában

α) Vektorműveletek matrixalakban 142
β) Vetítő, tükröző és forgató matrixok 144

6. §. Lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldása a matrixszámítás segítségével

a) *A matrixszámítás alkalmazása a lineáris algebrai egyenletrendszerek elméletében* 147
α) Nem szinguláris matrixú inhomogén egyenletrendszer megoldása ... 147
β) Nem szinguláris együtthatómatrix invertálása 147
I°. Invertálás az aldeterminánsok segítségével 147
II°. Invertálás a matrix faktorizációjának felhasználásával 148
III°. Invertálás a matrix kanonikus előállításának felhasználásával ... 148
IV°. Invertálás rekurzív eljárással 149
γ) Tetszőleges matrixú homogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása 154
δ) Tetszőleges matrixú inhomogén egyenletrendszer megoldása 159

b) *Műszaki alkalmazások* 161
α) Szabályos Vierendeel-tartók és lánchidak számítása 161
I°. Lineáris inhomogén algebrai matrixegyenlet megoldása az egyenlet abszolút tagjának „harmonikus analízisé"-vel 161
II°. Szabályos Vierendeel-tartók vizsgálata 163
III°. Lánchidak vizsgálata 164

β) Periodikus („stacionárius") elektromágneses folyamatok leírása a matrixszámítás segítségével 170
I°. Egy rezgőkör és több rezgőkörből álló rendszer periodikus folyamatait leíró skalár- és matrixképletek 170
II°. Két induktíve és kapacitíve csatolt rezgőkörben folyó periodikus („stacionárius") áramok meghatározása a matrixszámítás segítségével 172

III°. Szimmetrikus háromfázisú transzformátor periodikus („stacionárius") áramainak meghatározása a matrixszámítás segítségével 173

c) *Valamely egyenletrendszer megoldásának módosulása néhány együttható megváltozása vagy egyes ismeretlenek és egyenletek elhagyása következtében* .. 177

α) Általános megjegyzések 177

β) Valamely matrix néhány elemének módosításával nyert matrix inverzének kiszámítása az eredeti matrix inverzéből (Sherman—Morrison-féle módszer) 178

γ) Valamely matrixból sorok és oszlopok elhagyásával nyert matrix reciprokának kiszámítása az eredeti matrix inverzéből (Egerváry-féle eljárás) 183

7. §. Lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek megoldása a matrixszámítás felhasználásával

a) *A matrixelmélet alkalmazása a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek elméletében* 190

α) Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer 190

I°. Elsőrendű homogén differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer 190

II°. Elsőrendű inhomogén differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer 192

β) Másodrendű lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer 193

I°. Másodrendű homogén differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer 193

II°. Másodrendű inhomogén differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer 195

III°. Megjegyzés 196

b) *Műszaki alkalmazások* 207

α) Rögzített tengely körüli forgást leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldása a matrixszámítás segítségével 207

β) Közös, rugalmas tengelyhez rögzített tárcsák torziós lengései 210

γ) Tranziens elektromágneses folyamatok matematikai leírása a matrixszámítás segítségével 214

I°. Több induktíve és kapacitíve csatolt rezgőkör tranziens folyamatait leíró differenciálegyenlet-rendszer matrixalakja 214

II°. Az egyfázisú transzformátor bekapcsolásánál lejátszódó tranziens folyamat vizsgálata 217

δ) Három induktíve és kapacitíve csatolt rezgőkör bekapcsolásánál lejátszódó tranziens folyamat vizsgálata cíklikus szimmetria esetén ... 222

IRODALOMJEGYZÉK

ELSŐ RÉSZ

A MATRIXSZÁMÍTÁS ELMÉLETÉNEK ALAPFOGALMAI

1. §. A MATRIXARITMETIKA ALAPTÉTELEINEK ÁTTEKINTÉSE

a) A matrix fogalma és főbb típusai

α) **Alapfogalmak** | „Matrix"-on állandó vagy változó mennyiségekből alkotott táblázatot értünk, amellyel bizonyos, a skalármennyiségekre értelmezett műveletekkel részben analóg, matematikai műveletek végezhetők.

Egy matrix általában a következő alakú:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

ahol az $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}$ jelképek *valós vagy komplex skalármennyiségeket* (adott számokat vagy változó mennyiségeket) jelentenek; e mennyiségeket a matrix *„elemei"*-nek nevezzük. Az elemek indexei megmutatják, hogy valamely elem a táblázat melyik sorában és melyik oszlopában foglal helyet; tehát a_{ik} a matrix i-edik sorában és k-adik oszlopában helyet foglaló elemet jelenti.

Ha meg akarjuk takarítani a fáradságot, amely egy matrix táblázatának esetleg többszöri, ismételt leírásával jár, jelölhetjük a matrixot egyetlen rövid jelképpel is. Általában vastagon nyomtatott vagy (kézírásban) kétszer alá- vagy föléhúzott nagybetűvel jelöljük az olyan matrixokat, amelyeknek egynél több sora és egynél több oszlopa van („téglalap-matrixok"), pl.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Olykor célszerű a matrix jelképén feltüntetni, hogy a matrix hány sort és hány oszlopot tartalmaz. A továbbiakban — ha valamely okból szükség lesz a sorok és oszlopok számának feltüntetésére — az n sorból és m oszlopból álló matrix jelölésére az $\mathbf{A}$ jelképet fogjuk alkalmazni.

$\mathbf{A}$
(n, m)

Azt a matrixot, amelyet $\mathbf{A}$-ból úgy nyerünk, hogy a sorokat és oszlopokat egymással felcseréljük (tehát az eredetileg i-edik sorból lesz az új matrix i-edik oszlopa és az

eredetileg k-adik oszlopból lesz az új matrix k-adik sora) az $\mathbf{A}$ matrix *„transzponált"*-jának nevezzük és $\mathbf{A}^*$-gal jelöljük. Például a fenti téglalap-matrix transzponáltja:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Azt a matrixot, amelyet $\mathbf{A}$-ból úgy nyerünk, hogy $\mathbf{A}$ mindegyik eleme helyébe az illető elem konjugáltját írjuk, az $\mathbf{A}$ matrix *„konjugált"*-jának nevezzük és $\bar{\mathbf{A}}$-val jelöljük. Például a

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \\ 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}$$

matrix[1] konjugáltja:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}.$$

Az egyetlen oszlopból álló matrixot *„oszlopmatrix"*-nak vagy *„oszlopvektor"*-nak[2] nevezzük. Jelképe vastagon nyomtatott (kézírásban: egyszer alá- vagy föléhúzott) kisbetű. Például:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}.$$

Az egyetlen sorból álló matrixot „sormatrix"-nak vagy *„sorvektor"*-nak nevezzük. Jelképe kifejezésre juttatja, hogy bármely sormatrix egy oszlopmatrix transzponáltjá-

[1] Ugyanis az ún. „harmadik egységgyökök" szokásos jelölésével:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j; \qquad \bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j.$$

[2] Amint később (az 5. §-ban) látni fogjuk, a háromméretű tér vektorai, valamint az azokra értelmezett műveletek a matrixszámítás jeleivel is leírhatók; egy háromméretű térbeli vektor egyaránt kifejezhető egy oszlopmatrixszal vagy egy sormatrixszal. (A háromméretű térbeli vektornak oszlop- vagy sormatrix alakban való írása az illető vektorral végzendő műveletek igénye szerint történik, lásd pl. két vektor skaláris szorzatának a matrixszámítás segítségével való kifejezését.) A háromméretű térbeli vektorfogalom általánosításával szokás „n méretű vektor"-okról is beszélni; így *bármely* sormatrix vagy oszlopmatrix úgy is felfogható, mint valamely vektornak matrix alakja, ezért röviden mind az oszlop-, mind a sormatrixokat a matrixszámításon belül „vektor" néven szokás említeni.

nak tekinthető:

$$\mathbf{b}^* = [b_1, b_2, \ldots, b_m].$$

Valamely $\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}$ matrix tetszés szerinti számú sorának és oszlopának elhagyásával nyert matrixot az eredeti matrix egyik „*minormatrix*"-ának nevezzük. Például az $\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}$ matrix azon (s számú sort és r számú oszlopot tartalmazó) minormatrixát, amelynek elemei az eredeti matrix $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$-edik sorában és $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$-edik oszlopában álló elemek, a következőképpen jelölhetjük:

$$\underset{(s,r)}{\mathbf{A}}{}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} = \begin{bmatrix} a_{\nu_1,\mu_1} & a_{\nu_1,\mu_2} & \ldots & a_{\nu_1,\mu_r} \\ a_{\nu_2,\mu_1} & a_{\nu_2,\mu_2} & \ldots & a_{\nu_2,\mu_r} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{\nu_s,\mu_1} & a_{\nu_s,\mu_2} & \ldots & a_{\nu_s,\mu_r} \end{bmatrix}.$$

Példa

Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -3 & 7 \\ 2 & 8 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrix első, második és negyedik sorában, továbbá második és negyedik oszlopában álló elemekből alkotott minormatrix:

$$\mathbf{A}^{1,2,4}_{2,4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ matrix speciális minormatrixaiként foghatók fel az $\mathbf{A}$ oszlopaiból adódó oszlopmatrixok, illetve az $\mathbf{A}$ soraiból adódó sormatrixok. Ezen oszlop- illetőleg sormatrixok segítségével az $\mathbf{A}$ matrix a következőképpen is kifejezhető:

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix};$$

ahol

$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nk} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{a}^k = [a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{km}].$$

Példa

Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

matrix felírható

$$\mathbf{A} = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}\right] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3],$$

illetve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [2, & -1, & 5] \\ [0, & 3, & -4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix}$$

alakban; nyilván jelen esetben

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

illetve

$$\mathbf{a}_1 = [2, \quad -1, \quad 5], \qquad \mathbf{a}^2 = [0, \quad 3, \quad -4].$$

β) Fontosabb matrixtípusok és jelöléseik

A matrixelméletben — bizonyos speciális matrixtípusok megjelölésére — még a következő elnevezések, illetve jelölések használatosak:

„Kvadratikus matrix"-nak nevezzük az olyan téglalapmatrixot, amelynek ugyanannyi sora van, mint ahány oszlopa. Az n sorból és n oszlopból álló kvadratikus matrixot *„n-ed rendűnek"* nevezzük. (Az „n" a matrix „rendszám"-a.)

„Diagonálmatrix" az olyan kvadratikus matrix, amely csak a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott átlóban (az ún. „fődiagonálisban" vagy „főátlóban") tartalmaz zérustól különböző elemeket, tehát a fődiagonálison kívüli elemei mind nullával egyenlők. Rövidebb jelölésére az

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

rásmód alkalmazható.

Példa

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \langle 2, \ -1, \ 5, \ 3 \rangle.$$

„Egységmatrix" az olyan diagonálmatrix, melynek a fődiagonálisában álló elemei mind 1-gyel egyenlők. Jelképe: **E** vagy $[\delta_{ij}]$; a δ_{ij} jelkép („Kronecker-szimbólum") jelentése: $\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$ és $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$. Az n-ed rendű egységmatrix szokásos jelképe még (ha az egységmatrix rendszámát is fel kívánjuk a jelképes jelölésben tüntetni): $\mathbf{E}_n$.

„Permutáló matrix"-nak nevezünk minden olyan kvadratikus matrixot, mely az egységmatrixból a sorok vagy oszlopok tetszőleges permutációjával származtatható. Bármely permutáló matrixnak az a jellegzetes tulajdonsága, hogy annak minden sora, illetőleg minden oszlopa egyetlen egyest tartalmaz, az összes többi elemek zérussal egyenlők.

Például a következő negyedrendű kvadratikus matrix permutáló matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

„Szimmetrikus matrix"-nak mondjuk az olyan kvadratikus matrixot, amelynek elemei a fődiagonálisra nézve szimmetrikus elrendezésűek, azaz: $a_{ij} = a_{ji}$; a szimmetrikus **A** matrix nyilván azonos a transzponáltjával: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrix szimmetrikus; nyilván ez esetben $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

„Hermitikus matrix"-nak nevezzük az olyan **A** kvadratikus matrixot, amelynek elemei az $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ egyenletnek tesznek eleget; tehát ha **A** hermitikus, akkor: $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^*$

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 - 2j & 2 + 3j \\ 1 + 2j & 0 & 5j \\ 2 - 3j & -5j & 6 \end{bmatrix}$$

matrix hermitikus; nyilván ez esetben $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^*$.

„Háromszög-matrix"-on olyan kvadratikus matrix értendő, amelynek vagy a főátló feletti minden eleme zérus (*„alsó* háromszög-matrix") vagy a fődiagonális alatti valamennyi eleme nulla (*„felső* háromszög-matrix").

Példák. Alsó háromszög-matrix (jelképe: $\mathbb{L}$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Felső háromszög-matrix (jelképe: ◹):

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

„*Ciklikus matrix*"-nak nevezzük az olyan kvadratikus matrixot, amelynek elemei soronként (és oszloponként) ciklikusan ismétlődnek.[3] Egy n-ed rendű ciklikus matrix

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

alakú, tehát a ciklikus matrix első sorának elemei által teljesen meg van határozva: az i-edik sor j-edik eleme: $a_{ij} = c_{j-i}$; $c_{-k} = c_{n-k}$; $(i, j, k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$. (A ciklikus matrix elemei az indexek különbségének „modulo n" periodikus függvényei.) A ciklikus matrix rövid jelölésére a $\mathbf{C}(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ jelkép szolgál.

Példa

A $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}(2, 0, -1, 6)$$

matrix ciklikus.

„*Primitív ciklikus matrix*"-nak nevezünk (és általában $\mathfrak{Q}$-val jelölünk) minden olyan — tetszés szerinti rendszámú — ciklikus matrixot, amelynek első sorában balról az első elem nulla, a második 1, és az első sor összes többi eleme zérus. Az n-ed rendű primitív ciklikus matrix rövid jelölése tehát: $\mathfrak{Q} = \mathbf{C}(0, 1, 0, \dots, 0)$, részletes kiírása pedig:

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát *például* a harmadrendű primitív ciklikus matrix:

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

„*Kontinuáns matrix*". Az oly kvadratikus matrixot, amely csupán a főátlóban és az azzal szomszédos, vele párhuzamos ferde sorokban tartalmaz zérustól különböző

[3] Azaz bármelyik sor a közvetlenül felette levő sorból úgy nyerhető, hogy annak mindegyik eleme helyébe az illető elem bal oldali szomszédját írjuk; az első elem helyébe — amelynek nincs bal oldali szomszédja — a sor utolsó eleme kerül.

elemeket, „kontinuáns matrix"-nak nevezzük. A műszaki alkalmazások szempontjából a szimmetrikus kontinuáns matrixoknak van jelentőségük; ezeknek általános alakjuk:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Példa

A

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

hatodrendű kvadratikus matrix kontinuáns.

b) Matrixok egyenlősége, összeadása, kivonása és szorzása

α) Egyenlőség

Két matrix akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha ugyanannyi sort és oszlopot tartalmaznak, és a megfelelő helyeken álló elemeik egyenlők. Egy $\underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}} = \underset{(n,\,m)}{\mathbf{B}}$ típusú egyenlet tehát $n \times m$ számú skalár-egyenlettel, valamint n, illetve m vektoregyenlettel (részletesebben: n sorvektor-egyenlettel, illetve m oszlopvektor-egyenlettel) ekvivalens.

Az $\underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}} = 0$ egyenlet a „nullmatrix"-ot („zérusmatrix"-ot) definiálja, azaz egy olyan matrixot, amelynek minden eleme nulla.

β) Összeadás, kivonás

Az összeadás és kivonás csupán ugyanannyi sort és oszlopot tartalmazó matrixokra van értelmezve, a következőképpen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} =$$

(1.1)

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1m} \pm b_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2m} \pm b_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Az ily módon értelmezett *összeadás asszociatív* [azaz: $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$] *és kommutatív* [azaz: $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$].

Példák

Matrixok összeadása:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

Matrixok kivonása:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés. Szimmetrikus matrixok összege is szimmetrikus, ciklikus matrixok összege is ciklikus, háromszög-matrixok összege is háromszög-matrix, kontinuáns matrixok összege is kontinuáns, diagonálmatrixok összege is diagonálmatrix.

γ) Szorzás | *Matrixnak skalárral való szorzási szabálya* a matrixösszeadás definíciójának következménye: matrixot egy skalárral úgy szorzunk, hogy a matrix mindegyik elemét megszorozzuk az adott skalár szorzóval. A skalárral való szorzás kommutatív (tehát: $c \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot c$) és disztributív [tehát: $(a+b)\,\mathbf{A} = a \cdot \mathbf{A} + b \cdot \mathbf{A}$].

Matrixnak matrixszal való szorzását illetőleg különösképpen ki kell emelni két körülményt:

I. Adott **A** matrixnak adott **B** matrixszal való $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ szorzata *csak akkor értelmezhető, ha* **A**-*nak* (*a bal oldali tényezőnek*) *ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora van* **B**-*nek* (*a jobb oldali tényezőnek*). Ha e követelmény teljesül, azt szokás mondani, hogy **A** és **B** az *adott sorrendben „konformábilis"*-ak.

II. Matrixnak matrixszal való szorzása *általában nem kommutatív* (tehát általában $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$). Ha (speciális esetben) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, akkor az **A** és **B** matrixokat felcserélhetőknek (kommutábilisaknak) mondjuk.

Két konformábilis matrix szorzatát a következő szabály szerint számítjuk ki:

$$(1.2)\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ms} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{ks} \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{2k}b_{ks} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{k=1}^{m} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{nk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{nk}b_{ks} \end{bmatrix}.$$

Példa

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 2 - 2\cdot 3 - 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 4\cdot 3 + 2\cdot 0 - 1\cdot 5 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 7\cdot 3 + 1\cdot 1 - 8\cdot 3 & 3\cdot 3 - 7\cdot 0 + 1\cdot 5 - 8\cdot 1 \\ 2\cdot 2 - 4\cdot 3 - 3\cdot 1 + 1\cdot 3 & 2\cdot 3 + 4\cdot 0 - 3\cdot 5 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}.$$

A matrixok fenti szorzási szabályának birtokában evidens, hogy az $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ *matrixegyenlet*, azaz — részletesen kiírva — az

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrixegyenlet az

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \cdot \quad & \quad \cdot \qquad\qquad \dots \quad \cdot \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

skalár-egyenletrendszerrel egyenértékű.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixok *csak akkor szorozhatók össze mind az* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, *mind a* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ *sorrendben, ha* $\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}$, illetve $\underset{(n,m)}{\mathbf{B}}$ *típusúak*. A szorzatok

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m,n)}{\mathbf{B}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{C}}, \quad \text{illetőleg} \quad \underset{(m,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \underset{(m,m)}{\mathbf{D}}$$

típusú kvadratikus matrixok.

Oszlopmatrixnak és sormatrixnak a szorzata a tényezők sorrendjétől függően *szám vagy téglalap-* (speciális esetben kvadratikus) *matrix*. Ugyanis

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \tag{1.3}$$

$$= [b_1, b_2, \dots, b_n] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k;$$

továbbá:

$$(1.4)\qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_n] = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \ldots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \ldots & b_2a_n \\ . & . & \ldots & . \\ b_na_1 & b_na_2 & \ldots & b_na_n \end{bmatrix};$$

illetőleg:

$$(1.5)\qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot [b_1, b_2, \ldots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ . & . & \ldots & . \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés. Az $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b}$ szorzatnak az $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$ képlettel való képzési módját az $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sor és a $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ oszlop komponálásának nevezzük. Eszerint (konformábilis) téglalap-matrixok szorzásánál a szorzat i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elemet úgy nyerjük, hogy a bal oldali tényező i-edik sorát a jobb oldali tényező j-edik oszlopával komponáljuk. (Vö. a téglalap-matrixok szorzatának fentebb megadott képletével.)

Az $\mathbf{a}^*\mathbf{b} = \mathbf{b}^*\mathbf{a}$ szorzatot *skalár szorzatnak*,[4] az $\mathbf{ab}^*$, illetőleg $\mathbf{ba}^*$ szorzatot *diadikus szorzatnak* vagy röviden *diád*nak fogjuk nevezni.[5]

δ) Speciális matrixtípusok szorzásánál mutatkozó sajátosságok

Két ugyanolyan rendű *kvadratikus matrix* szorzata mindkét sorrendben értelmezve van, azonban a különböző sorrendben képzett szorzatmatrixok általában különbözők.

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

kvadratikus matrixok különböző sorrendben képzett szorzatai:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 4\cdot 2 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 \\ -2\cdot 1 - 1\cdot 2 & -2\cdot 2 - 1\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 - 2\cdot 2 & 1\cdot 4 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 - 5\cdot 2 & 2\cdot 4 - 5\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az *egységmatrix* és a *zérusmatrix* bármely vele egyező rendű kvadratikus matrixszal felcserélhető és

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

[4] A „skalárszorzat" elnevezés a háromméretű térbeli vektorok aritmetikájából származik; ha ugyanis két vektor skalárszorzatát matrixjelekkel akarjuk felírni, akkor egyik vektort oszlopmatrix, a másikat sormatrix alakban kell megadni (mindegy, hogy melyiket írjuk oszlop- és melyiket sormatrix alakban) és az így nyert matrixokat sor-oszlop sorrendben kell összeszorozni.

[5] A $\mathbf{ba}^*$ szorzat nyilván különböző dimenziójú tényezők esetén is értelmezhető.

továbbá:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

Míg az egységmatrixszal való szorzás a vele megszorzott matrixot változatlanul hagyja, addig egy *permutáló matrixszal való bal oldali, illetőleg jobb oldali szorzat* esetén a megszokott matrixnak sorai, illetőleg oszlopai permutálódnak. *Például* az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{matrixnak a} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

permutáló matrixszal való bal oldali, illetőleg jobb oldali szorzata:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

illetőleg

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bármely két egyező rendű *ciklikus matrix* felcserélhető, és szorzatuk ciklikus.

Bármely két egyező rendű *diagonálmatrix* mindig felcserélhető, és szorzatuk diagonálmatrix:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle = \langle a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n \rangle.$$

A $\langle c, c, \ldots, c \rangle$ n-ed rendű diagonálmatrix az n-ed rendű kvadratikus matrixok aritmetikájában a c skalárral ekvivalens; ugyanis:

$$\langle c, c, \ldots, c \rangle \mathbf{A} = c\mathbf{E}\mathbf{A} = c\mathbf{A}.$$

ε) A szorzás műveletével kapcsolatos egyéb megjegyzések

I°. Mátrixszorzat előállítása a tényezők oszlop- és sorvektorainak segítségével. *Valamely* $\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m,r)}{\mathbf{B}}$ *típusú matrixszorzat a tényezők oszlop- és sorvektoraival is kifejezhető*, éspedig *kétféle alakban*, aszerint, hogy melyik tényezőt állítjuk elő oszlopvektoraival és melyiket sorvektoraival.

Az

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}, \quad \underset{(m,r)}{\mathbf{B}} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r]$$

alakban írt tényezők esetén

$$(1.6) \qquad \underset{(n,m)\,(m,r)}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots \mathbf{b}_r] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{b}_r \\ \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}_r \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \quad \cdot \\ \mathbf{a}^n \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^n \cdot \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{a}^n \cdot \mathbf{b}_r \end{bmatrix},$$

tehát a szorzat egy n sorból és r oszlopból álló matrix, melynek elemei skalárszorzatok.

Az

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m], \quad \underset{(m,r)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{bmatrix}$$

alakban írt tényezőkből kiindulva pedig

$$\underset{(n,m)\ (m,r)}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}^1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}^2 + \ldots + \mathbf{a}_m\mathbf{b}^m,$$

ekkor tehát a szorzat m számú diád összegeként van előállítva.

Például a fentebb már kiszámított

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrixszorzat még a következőképpen is kiszámítható:

$$\begin{bmatrix} [4, & 2, & -1, & 2] \\ [3, & -7, & 1, & -8] \\ [2, & 4, & -3, & 1] \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} [4, & 2, & -1, & 2] \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [4, & 2, & -1, & 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [3, & -7, & 1, & -8] \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [3, & -7, & 1, & -8] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [2, & 4, & -3, & 1] \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [2, & 4, & -3, & 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{bmatrix},$$

illetve:

$$\left[\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-7\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-8\\1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}2, & 3\\3, & 0\\1, & 5\\3, & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}[2,\ 3] + \begin{bmatrix}2\\-7\\4\end{bmatrix}[-3,\ 0] + \begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}[1,\ 5] + \begin{bmatrix}2\\-8\\1\end{bmatrix}[3,\ 1] =$$

$$= \begin{bmatrix}8 & 12\\6 & 9\\4 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6 & 0\\21 & 0\\-12 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & -5\\1 & 5\\-3 & -15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6 & 2\\-24 & -8\\3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 9\\4 & 6\\-8 & -8\end{bmatrix}.$$

II°. Matrixszorzat asszociativitása és disztributivitása. A skaláris szorzás két alaptörvénye — az asszociativitás és a disztributivitás — matrixok szorzásánál is érvényes.

A *matrixszorzat asszociativitása* a következőképpen foglalható képletbe:

$$(1.7) \qquad \underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}}\ \underset{(m,\,r)}{\mathbf{B}}\Big)\ \underset{(r,\,s)}{\mathbf{C}} = \underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}}\Big(\underset{(m,\,r)}{\mathbf{B}}\ \underset{(r,\,s)}{\mathbf{C}}\Big) = \underset{(n,\,s)}{\mathbf{D}};$$

ezen összefüggés helyessége azáltal igazolható, hogy mindkét módon kiszámított szorzatmatrix általános eleme:

$$d_{ij} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{r} a_{i\mu}\, b_{\mu\nu}\, c_{\nu j}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s \end{pmatrix};$$

tehát többtényezős matrixszorzat (a sorrend megtartása mellett) a zárójellel kijelölt csoportosítás módjától független. Eszerint a zárójelezés fölösleges, és tetszés szerinti számú (szomszédos páronként konformábilis) matrix szorzata az első (bal oldali szélső) tényezővel egyező számú sort és az utolsó (jobb oldali szélső) tényezővel egyező számú oszlopot tartalmaz:

$$(1.8) \qquad \underset{(\alpha,\,\beta)}{\mathbf{A}}\ \underset{(\beta,\,\gamma)}{\mathbf{B}}\ \underset{(\gamma,\,\delta)}{\mathbf{C}} \ldots \underset{(\mu,\,\nu)}{\mathbf{M}} = \underset{(\alpha,\,\nu)}{\mathbf{N}}.$$

A *matrixszorzat disztributivitását* az

$$(1.9) \qquad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

reláció fejezi ki, mely az összeadás és szorzás definíciójának közvetlen következménye. Alkalmazásánál mindig figyelemmel kell lenni a tényezők sorrendjére. Például

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{D} = (\mathbf{AB} + \mathbf{AC})\,\mathbf{D} = \mathbf{ABD} + \mathbf{ACD}.$$

III°. Háromtényezős matrixszorzat minormatrixai. Az alábbiakban többször fogjuk alkalmazni *egy matrixszorzat valamely minormatrixának* a következő előállítását:

Az $\underset{(n,k)}{\mathbf{A}}\ \underset{(k,l)}{\mathbf{B}}\ \underset{(l,m)}{\mathbf{C}} = \underset{(n,m)}{\mathbf{D}}$ szorzat $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$-edik sorában és $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$-edik oszlopában helyet foglaló elemekből alkotott minormatrix:

$$\mathbf{D}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} = \mathbf{A}^{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s}_{1, 2, \ldots, k}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}^{1, 2, \ldots, l}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$$

($s \leqq n$, $r \leqq m$). Ez az azonosság a szorzat definíciójának közvetlen következménye, és az $r = 1$, $s = 1$, $k = l$, $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ esetben éppen az $\underset{(n,k)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(k,m)}{\mathbf{C}}$ szorzat valamely elemének fentebb ismertetett képletére redukálódik.

Példa. A szorzás elvégzésével egyszerűen igazolható, hogy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 8 & -8 \\ -5 & 2 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Mármost a fenti azonosság felhasználásával például a szorzás eredményeként nyert matrix első és harmadik sorában, illetve második és harmadik oszlopában helyet foglaló elemekből alkotott minormatrix:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 8 & -8 \\ -5 & 2 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{1,3}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a tényezők minormatrixaiból az egész szorzatmatrix kiszámítása nélkül közvetlenül nyerhető a következőképpen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{1,3}_{1,2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{1,2,3}_{2,3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

IV°. Kvadratikus és bilineáris alakok előállítása háromtényezős matrixszorzattal. Valamely többtényezős matrixszorzat tényezői közt természetesen sor- és oszlopmatrixok is előfordulhatnak. Ilyen például a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ *„kvadratikus alak”*: $\mathbf{x^* A x}$ vagy a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$ *„bilineáris*

alak" (azaz mind az x-eknek, mind az y-oknak lineáris kifejezése) $\mathbf{x^*Ay}$ mátrixszorzat alakban való előállítása. Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$\mathbf{x^*Ax} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \tag{1.10}$$

$$= [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j;$$

hasonlóképpen könnyen igazolható, hogy

$$\mathbf{x^*Ay} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j. \tag{1.11}$$

P é l d á k

Kvadratikus alak:

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 5x_1x_2$$

Bilineáris alak:

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1y_1 + 3y_2 + 0y_3 \\ 2y_1 + 0y_2 - 1y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_3.$$

ζ) Kvadratikus mátrix hatványozása

Többtényezős mátrixszorzat speciális esete valamely kvadratikus mátrix természetes egész kitevőjű hatványa:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \ldots \mathbf{A}}_{\text{I II } n\text{-edik tényező}}$$

A diagonálmátrixok szorzási szabályából következik, hogy bármely *diagonálmátrix természetes egész kitevőjű hatványa* a következőképpen állítható elő:

Ha $\mathbf{D} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_m \rangle$, akkor $\mathbf{D}^n = \langle d_1^n, d_2^n, \ldots, d_m^n \rangle$. (Később látni fogjuk, hogy ez a szabály tetszés szerinti n hatványkitevő esetére is általánosítható.)

η) Skalár-együtthatós matrixpolinom

A szorzás asszociativitása folytán $\mathbf{A}^n$ és $\mathbf{A}^m$ (az $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$ egyenlettel értelmezett nulladik hatványt is beleértve) kommutábilisak. Innen következik, hogy egy és ugyanazon matrixból skaláregyütthatókkal szerkesztett

$$c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \ldots + c_n\mathbf{A}^n$$

alakú matrixpolinomok közti *racionális egész műveletek* ugyanazon szabályok szerint végezhetők, mint skalárpolinomok esetén, továbbá, hogy *egy* változót tartalmazó skaláridentitások érvényesek maradnak akkor, ha bennük a változót tetszőleges kvadratikus matrixszal, az egységet pedig **E**-vel helyettesítjük.

Ha tehát a $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu$ skalárváltozós polinom eleget tesz a

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu = c_n \Pi(x - x_\nu)$$

azonosságnak, akkor ebből következik, hogy:

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{A}_\nu = c_n \Pi(\mathbf{A} - x_\nu\mathbf{E}) = c_n(\mathbf{A} - x_1\mathbf{E})\ (\mathbf{A} - x_2\mathbf{E}) \ldots (\mathbf{A} - x_n\mathbf{E}).$$

P é l d á u l nyilvánvaló, hogy

$$p(x) \equiv 3x^2 - 9x + 6 \equiv 3(x - 1)\,(x - 2);$$

ebből a fentiek szerint következik, hogy tetszőleges kvadratikus **A** matrix behelyettesítése esetén fennáll az alábbi azonosság:

$$p(\mathbf{A}) \equiv 3\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{A} + 6\mathbf{E} \equiv 3(\mathbf{A} - \mathbf{E})\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{E}).$$

Legyen például $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$,

tehát:

$$3\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{A} + 6\mathbf{E} = 3\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

továbbá:

$$3(\mathbf{A} - \mathbf{E})\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 3\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Továbbá — a diagonálmatrixok szorzási, illetve hatványozási szabályának figyelembevételével — bármely diagonálmatrix skaláregyütthatós polinomja a következő alakban állítható elő:

Ha $p(x)$ az x skalárváltozó tetszés szerinti racionális egész függvényét (polinomját) jelenti, akkor az x skalárváltozó helyébe beírva a $\mathbf{D} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_m \rangle$ diagonálmatrixot, a kapott $p(\mathbf{A})$ matrix eleget tesz a

$$p(\mathbf{A}) = \langle p(d_1), p(d_2), \ldots, p(d_m) \rangle \tag{1.12}$$

egyenlőségnek.

Matrixok hatványainak és polinomjainak képzésére a legegyszerűbb példát a ciklikus matrixok szolgáltatják. Így *például* az

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ún. harmadrendű primitív ciklikus matrix négyzete:

$$\mathfrak{Q}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{Q}^*$$

és köbe:

$$\mathfrak{Q}^3 = \mathfrak{Q}^2 \cdot \mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

Az $\mathfrak{Q}$ harmadrendű primitív ciklikus matrix eszerint kielégíti az $\mathfrak{Q}^3 - \mathbf{E} = 0$ algebrai egyenletet.

A $\mathbf{C}(c_0, c_1, c_2) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix}$ általános harmadrendű ciklikus matrix mármost felbontható a következő módon:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= c_0 \mathbf{E} + c_1 \mathfrak{Q} + c_2 \mathfrak{Q}^2.$$

Ez az eredmény mutatja, hogy bármely harmadrendű ciklikus matrix felírható mint az $\mathfrak{Q}$ harmadrendű primitív ciklikus matrixnak (legfeljebb) másodfokú polinomja. Ebből viszont ($\mathfrak{Q}$ hatványainak felcserélhetősége miatt) következik, hogy bármely két harmadrendű ciklikus matrix egymással felcserélhető.

Hasonló meggondolásokkal belátható, hogy az

$$\mathfrak{Q} = \mathbf{C}(0, 1, 0, \ldots, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

n-ed rendű primitív ciklikus matrix kielégíti az

$$\underset{(n,n)}{\mathfrak{Q}^n} - \underset{(n,n)}{\mathbf{E}} = 0$$

egyenletet, továbbá bármely általános n-ed rendű ciklikus matrix felírható, mint az n-ed rendű primitív ciklikus matrixnak legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomja:

$$\mathbf{C}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = c_0\mathbf{E} + c_1\,\mathbf{\Omega} + c_2\,\mathbf{\Omega}^2 + \ldots + c_{n-1}\,\mathbf{\Omega}^{n-1}.$$

Eszerint (az n-ed rendű primitív ciklikus matrix hatványainak felcserélhetősége következtében) bármely két n-ed rendű ciklikus matrix egymással felcserélhető.

ϑ) **Projektormatrix fogalma és hatványozása**

Hatványozás szempontjából a matrixoknak egy nevezetes típusát alkotják az ún. „projektor"- („idempotens") matrixok,[6] melyeknek az a jellegzetes tulajdonságuk, hogy bármely pozitív egész kitevőjű hatványuk egyenlő az eredeti matrixszal. Egy $\mathbf{P}$ projektormatrix tehát a következő jellemző egyenleteknek tesz eleget:

(1.13) $$\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^3 = \ldots$$

Ezeknek a matrixoknak egyébként jelentékeny szerepük van a szimmetrikus matrixok redukciójában.

Például a $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrix projektor,

mert

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ι) **Tükröző matrix fogalma**

A matrixszámítás térgeometriai alkalmazásaira (lásd a II. részben az 5. §-t) való tekintettel „tükröző matrix"-nak nevezünk minden olyan kvadratikus matrixot, melynek négyzete (önmagával való szorzata) egységmatrix:

(1.14) $$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}.$$

Például a $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$ matrix (tetszés szerinti φ esetén) tükröző matrix, mert

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & \cos\varphi \cdot \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\ -\cos\varphi \cdot \sin\varphi + \cos\varphi \cdot \sin\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[6] A „projektor" (magyarul „vetítő") elnevezés magyarázatát lásd az 5. §-ban!

Példák

γ | 1. Képezzük az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

matrixok **AB** és **BA** szorzatait.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 6 & -24 & 21 \\ 16 & 14 & 10 & -15 \\ 3 & 10 & 11 & 0 \\ 7 & -8 & -7 & -15 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & -1 & -12 \\ 19 & -11 & 17 \\ -7 & 26 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Szorozzuk meg az alábbi **A** matrixot a transzponáltjával:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AA^*}=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30 & -7 & 3 \\ -7 & 26 & 34 \\ 3 & 34 & 53 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az eredmény szimmetrikus matrix.

δ | 1. Képezzük az alábbi két háromszög-matrix szorzatát:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 20 & 9 & 0 \\ 47 & 21 & 28 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -12 & 6 & 1 \\ 15 & 1 & 44 \end{bmatrix}.$$

2 Igazoljuk, hogy az alábbi két ciklikus matrix szorzás szempontjából felcserélhető, és szorzatuk szintén ciklikus:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1(a, b, c); \qquad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2(x, y, z).$$

$$\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz+cy & ay+bx+cz & az+by+cx \\ cx+az+by & cy+ax+bz & cz+ay+bx \\ bx+cz+ay & by+cx+az & bz+cy+ax \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ax+bz+cy & ay+bx+cz & az+by+cx \\ az+by+cx & ax+bz+cy & ay+bx+cz \\ ay+bx+cz & az+by+cx & ax+bz+cy \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{C}_3(ax+bz+cy,\ ay+bx+cz,\ az+by+cx).$$

Hasonlóan:

$$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy+bz & bx+ay+cz & cx+by+az \\ az+cx+by & bz+ax+cy & cz+bx+ay \\ ay+cz+bx & by+az+cx & cy+bz+ax \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{C}_3(ax+bz+cy,\ ay+bx+cz,\ az+by+cx)$$

ε Igazoljuk a matrixok szorzásának asszociativitását az alábbi két feladaton:

1. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 36 & 25 \\ -2 & 14 & 15 & 15 \\ 34 & 4 & 42 & 20 \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 36 & 25 \\ -2 & 14 & 15 & 15 \\ 34 & 4 & 42 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 & 299 & 183 \\ 19 & 109 & 123 \\ -114 & 380 & 120 \end{bmatrix}.$$

Másrészt:

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 32 & -6 \\ 0 & 47 & 39 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -19 & 32 & -6 \\ 0 & 47 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 & 299 & 183 \\ 19 & 109 & 123 \\ -114 & 380 & 120 \end{bmatrix}.$$

2. $\mathbf{A} = [2, -5, 4]$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{AB} = [32, -4, -37]$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = [32, -4, -37] \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = -179.$$

Másrészt:

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 23 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = [2, -5, 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 23 \\ -17 \end{bmatrix} = -179.$$

ζ 1. Igazoljuk az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \equiv (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ azonosságot, ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

A bal oldal:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

A jobb oldal:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ felcserélhetők, azaz

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA},$$

akkor matrixokra is érvényes a skalárok köréből jól ismert azonosság:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\,\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2.$$

2. Igazoljuk az előbbi feladatban szereplő $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixokkal az alábbi két azonosságot:

$$a)\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} - \mathbf{AB} - \mathbf{B}^2;$$

$$b)\ (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}^2 - \mathbf{BA} + \mathbf{AB} - \mathbf{B}^2.$$

a) A bal oldal:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -38 \\ 16 & -36 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 12 & -19 \\ 8 & -18 \end{bmatrix}.$$

A jobb oldal:

$$\mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} - \mathbf{AB} - \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -38 \\ 16 & -36 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 12 & -19 \\ 8 & -18 \end{bmatrix}.$$

b) A bal oldal:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 18 \\ 16 & -8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

A jobb oldal:

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{BA} + \mathbf{AB} - \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 18 \\ 16 & -8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Amint látjuk, általánosságban nem érvényes matrixokra az

$$(a + b)(a - b) \equiv (a - b)(a + b) \equiv a^2 - b^2$$

skalárazonosság, csak akkor, ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Ez esetben tehát:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

η) Írjuk fel az alábbi ciklikus matrixot primitív ciklikus matrixok polinomjaként:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{C}(3, \ -1, \ 0, \ 5).$$

A negyedrendű primitív ciklikus matrix:

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek hatványai:

$$\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{Q}^3 = \mathfrak{Q}^2\,\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{Q}^3 = \mathfrak{Q}^3\,\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát:

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{E} - \mathfrak{Q} + 0 \cdot \mathfrak{Q}^2 + 5\mathfrak{Q}^3.$$

Valójában:

$$3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Kvadratikus matrix determinánsa és reciproka

α) Kvadratikus matrix determinánsa

Számok körében az osztás az $\frac{a}{b} = ab^{-1} = b^{-1}a$ egyenleteknek megfelelően egyenértékű az osztó reciprok értékével, más szóval inverzével való szorzással. Reciproka (inverze) pedig 0 kivételével minden számnak van.

Ha a kvadratikus matrixok körében az osztást analóg módon kívánjuk értelmezni, akkor először is a következő kérdéssel kell foglalkoznunk: Mi dönti el azt, hogy egy **A** *matrixnak van-e reciproka (inverze)*, azaz található-e hozzá egy olyan, $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelölendő matrix, melynek az adott **A**-val való szorzata (bármelyik sorrendben) az egységmatrixszal egyenlő. Erre a kérdésre ad választ a matrixaritmetikában alapvető alábbi tétel:

1. t é t e l. Valamely kvadratikus **A** matrixnak akkor és csak akkor van reciproka (akkor „invertálható"), ha az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ matrix elemeiből alkotott $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns — melyet az **A** matrix determinánsának is szokás nevezni, és amelyet a következőkben legtöbbnyire $|\mathbf{A}|$-val vagy olykor $\det \mathbf{A}$-val fogunk jelölni — nullától különböző.

Ebben az értelemben tehát a determinánsnak a matrixok körében *ugyanolyan szerepe van, mint az abszolút érték* fogalmának a valós és komplex számok (skalárok) körében.

A jelen könyvben — címének megfelelően — nem foglalkozhatunk részletesen a determinánselmélettel; annak elemeit ismertnek tételezzük fel, és e helyen azoknak a tételeknek a felsorolására szorítkozunk, melyek a későbbiek folyamán alkalmazásra kerülnek.

Valamely n-ed rendű **A** matrix $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$-adik sorának és $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$-adik oszlopának közös elemeiből alkotott k-ad rendű „aldeterminánsˮ-t („minorˮ-t) a következőképpen fogjuk jelölni:

$$\begin{vmatrix} a_{\mu_1\nu_1} & a_{\mu_1\nu_2} & \dots & a_{\mu_1\nu_k} \\ a_{\mu_2\nu_1} & a_{\mu_2\nu_2} & \dots & a_{\mu_2\nu_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu_k\nu_1} & a_{\mu_k\nu_2} & \dots & a_{\mu_k\nu_k} \end{vmatrix} = \left| \mathbf{A}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_k} \right|$$

Azon $n-1$-ed rendű determináns (az **A** matrix $a_{\mu\nu}$ eleméhez tartozó *„előjelezett* aldeterminánsˮ vagy más néven „komplementer minorˮ) számára, amely az **A** determinánsból a ν-edik sor és μ-edik oszlop törlésével nyerhető, még a következő jelölést vezetjük be:

$$A_{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \left| \mathbf{A}^{1\,2\,\dots\,\mu-1,\,\mu+1\,\dots\,n}_{1\,2\,\dots\,\nu-1,\,\nu+1\,\dots\,n} \right| . \tag{1.15}$$

β) A determinánselméletből a későbbiek során alkalmazásra kerülő alapvető összefüggések

I°. A determinánsnak valamely sora vagy oszlopa szerint való kifejtésére vonatkozó azonosságok:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}A_{i\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}A_{\nu i} = |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^*|, \tag{1.16}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}A_{j\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}A_{\nu j} = 0, \text{ ha } i \neq j.$$

Például harmadrendű determináns első sora szerint kifejtve:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})}_{A_{11}} +$$

$$+ a_{12}\underbrace{(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31})}_{A_{12}} + a_{13}\underbrace{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}_{A_{13}}.$$

II°. A determinánsnak felső k sora szerinti kifejtésére vonatkozó azonosság. (Az irodalomban általában *„Laplace-féle kifejtési szabály"* néven ismeretes.) A fentebb ismertetett kifejtési tétel a determináns számértékét elsőrendű és n — 1-ed rendű aldeterminánsok szorzatösszegeként szolgáltatja. A most ismertetendő „Laplace-féle kifejtési szabály" az előbbi kifejtési tétel általánosításaként a determináns számértékét k-ad rendű és n — k-ad rendű aldeterminánsok szorzatösszegeként adja meg. A Laplace-féle kifejtési tételt a következő képlet fejezi ki:

$$|\mathbf{A}| = \sum (-1)^{\sum_{\kappa=1}^{k} \kappa + a_k} \left| \mathbf{A}^{1,2,\ldots,k}_{a_1,a_2,\ldots,a_k} \right| \left| \mathbf{A}^{k+1,k+2,\ldots,n}_{a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_n} \right|. \tag{1.17}$$

Ennek a tömör képletnek a tartalmát a következőképpen lehet szavakban részletezni: az $|\mathbf{A}|$ determináns (bármely determináns felfogható egy $\mathbf{A}$ matrix determinánsaként) felső k sorából minden lehetséges módon — összesen tehát $\binom{n}{k}$ számú módon — kiválasztandók az

$$\left| \mathbf{A}^{1,2,\ldots,k}_{a_1,a_2,\ldots,a_k} \right|$$

jelképpel jelölt k-ad rendű aldeterminánsok. Ezek mindegyike megszorzandó az alsó $n - k$ sorból választott

$$\left| \mathbf{A}^{k+1,k+2,\ldots,n}_{a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_n} \right|$$

jelképpel jelölt „komplementer" aldeterminánssal. (Itt a komplementer szó arra utal, hogy az $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ indexek éppen azokat az oszlopokat jelentik, melyek az

eredeti k-ad rendű aldeterminánsképzéséhez nem lettek felhasználva.) Minden egyes így nyert szorzatot megfelelően kell előjelezni a $(-1)^{\sum_{\varkappa=1}^{k} \varkappa + a_\varkappa}$-vel való szorzás által. Végül az így nyert $\binom{n}{k}$ számú előjelezett szorzat összeadandó. (A $\sum_{a}$ jelképben a $\sum$ jel alá tett α az összegezésnek ezt a módját kívánja kifejezésre juttatni.)

Például egy negyedrendű determinánsnak a felső két sora szerinti kifejtése a Laplace-féle kifejtési szabály szerint a következőképpen történik ($n = 4$, $k = 2$):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1+2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+1+2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+1+2+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} .$$

III°. Matrixszorzat valamely kvadratikus minormatrixának determinánsa (Cauchy – Binet-tétel): Ha

$$\underset{(n,k)}{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \underset{(k,m)}{\mathbf{B}} = \mathbf{B},$$

azaz $\mathbf{A}$ sorvektorai $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n)$ és $\mathbf{B}$ oszlopvektorai $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots \mathbf{b}_m)$ egyenlő dimenziójúak, akkor:

$$\left| (\mathbf{AB})_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} \right| = \left| \mathbf{A}_{1, 2, \ldots, k}^{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r} \mathbf{B}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r}^{1, 2, \ldots, k} \right| = \tag{1.18}$$

$$= \sum_{(\gamma)} \left| \mathbf{A}_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} \right| \left| \mathbf{B}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r}^{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r} \right| ,$$

ahol $\sum_{(\gamma)}$ az $1, 2, \ldots, k$ számok összes r-ed osztályú $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$ kombinációira kiterjedő összegezést jelent, azaz a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ számok helyébe (az 1.18 képletben) az $1, 2, \ldots, k$ számok összes r-ed osztályú kombinációit be kell helyettesíteni, és az így kapott $\binom{k}{r}$ számú szorzatot össze kell adni.

Például

$$\left|\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}\right\}^{1,2}_{2,3}\right| = \left|\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{bmatrix}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 & a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 \\ b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 & b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 \end{vmatrix}.$$

A Cauchy—Binet-tétel *speciális esete* a következő (a determinánsok szorzási tételét kifejező) azonosság:

(1.19) $$\underset{(n,n)}{|\mathbf{A}|}\cdot\underset{(n,n)}{|\mathbf{B}|} = \underset{(n,n)}{|\mathbf{A}|}\,\underset{(n,n)}{|\mathbf{B}|}$$

vagy skalár írásmóddal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}b_{\nu 1} & \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}b_{\nu 2} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}b_{\nu n} \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}b_{\nu 1} & \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}b_{\nu 2} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}b_{\nu n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}b_{\nu 1} & \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}b_{\nu 2} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}b_{\nu n} \end{vmatrix}.$$

Például

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

A Cauchy—Binet-tétel *további speciális esete* az, amikor a matrixtényezők egymásnak transzponáltjai:

(1.20) $$\underset{(n,k)}{|\mathbf{C}^*|}\cdot\underset{(k,n)}{|\mathbf{C}|} = \sum_{(\nu)} |\mathbf{C}^{*\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}_{1,2,\dots,n}|\,|\mathbf{C}^{1,2,\dots,n}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}| = \sum_{(\nu)} |\mathbf{C}^{1,2,\dots,n}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}|^2,$$

ha $k \geqq n$, és

$$\underset{(n,k)}{|\mathbf{C}^*|}\cdot\underset{(k,n)}{|\mathbf{C}|} = 0, \text{ ha } k < n.$$

Például $k = 4$, $n = 2$ esetén:

$$\left|\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 \end{vmatrix}.$$

IV°. *A* $\{\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\}n$-ed rendű, ún. „karakterisztikus matrix" determinánsa, az ún. „karakterisztikus determináns":

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = |\lambda\delta_{ij} - a_{ij}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \dots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \dots & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

a λ skalárváltozónak n-ed fokú polinomja. Ennek explicit kifejtése:

$$\lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \dots \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Például az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ harmadrendű kvadratikus matrix karakterisztikus determinánsa a fentiek szerint:

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2\{a_{11} + a_{22} + a_{33}\} + \lambda\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right\} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Legyen *például* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, akkor a karakterisztikus determi-

náns:

$$|\lambda\,\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & -3\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^3-\lambda^2\{2+1-1\}+\lambda\left\{\begin{vmatrix}2&-2\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}\right\}-\begin{vmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-2\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6.$$

V°. Determináns differenciálása. Ha a determináns elemei egy változónak a függvényei, akkor *a determinánsnak* ezen változó szerinti *differenciálhányadosát* úgy nyerjük, hogy rendre a determináns első, második, ..., utolsó oszlopának (vagy sorának) az elemeit differenciáljuk, és az így kapott determinánsokat összeadjuk. Ezen szabály alapján:

$$\frac{d}{d\lambda}|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ 0 & \lambda-a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ & \cdot & \dots & \cdot\\ 0 & -a_{n1} & \dots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0 & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & 1 & \dots & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ -a_{n1} & 0 & \dots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}+$$

(1.22)

$$+\dots+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & 0\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1\end{vmatrix}=\sum_{\nu=1}^{n}\left|\{\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\}^{1,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots}_{1,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots}\right|,$$

azaz a „karakterisztikus determináns"-nak a λ változó szerinti első differenciálhányadosa egyenlő az $n-1$-ed rendű főminorok összegével.

Például

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -a_{12}\\ 0 & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{12} & 0\\ -a_{21} & 1\end{vmatrix}=$$
$$=(\lambda-a_{22})+(\lambda-a_{11})=2\lambda-(a_{11}+a_{22}).$$

A fentiekből a differenciálási művelet többszöri megismétlésével következik, hogy:

$$\frac{d}{d\lambda}|\lambda\,\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\sum_{(\nu)}\left|\{\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}\}^{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{n-k}}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_{n-k}}\right|, \tag{1.23}$$

ahol $\sum_{(\nu)}$ az $1, 2, \dots, n$ számok összes $(n-k)$-ad osztályú $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-k}$ kombinációira kiterjedő összegezést jelent.

VI°. Egy $(n+2)$-ed rendű determináns $(n+1)$-ed rendű aldeterminánsaiból képzett $D_{ii}D_{jj} - D_{ij}D_{ji}$ kifejezésnek két tényező szorzataként való előállítása. Legyen az adott $(n+2)$-ed rendű determináns:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\alpha} & a_{1\beta} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\alpha} & a_{2\beta} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n\alpha} & a_{n\beta} \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha n} & a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & \dots & a_{\beta n} & a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix},$$

akkor a D determináns $D_{\alpha\alpha}$, $D_{\beta\beta}$, $D_{\alpha\beta}$, $D_{\beta\alpha}$ $n+1$-ed rendű aldeterminánsaiból képzett $D_{\alpha\alpha} \cdot D_{\beta\beta} - D_{\alpha\beta} \cdot D_{\beta\alpha}$ kifejezés a következőképpen állítható elő két tényező szorzataként:

$$(1.24) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1\beta} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n\beta} \\ a_{\beta 1} & \dots & a_{\beta n} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1\alpha} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n\alpha} \\ a_{\alpha 1} & \dots & a_{\alpha n} & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1\alpha} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n\alpha} \\ a_{\beta 1} & \dots & a_{\beta n} & a_{\beta\alpha} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1\beta} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n\beta} \\ a_{\alpha 1} & \dots & a_{\alpha n} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1\alpha} & a_{1\beta} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n\alpha} & a_{n\beta} \\ a_{\alpha 1} & \dots & a_{\alpha n} & a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta 1} & \dots & a_{\beta n} & a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix},$$

azaz: $D_{\alpha\alpha} \cdot D_{\beta\beta} - D_{\alpha\beta} \cdot D_{\beta\alpha} = D_{\substack{\alpha\beta \\ \alpha\beta}} \cdot D$.

(A $D_{\substack{\alpha\beta \\ \alpha\beta}}$ jelkép azt a determinánst jelenti, amelyet a D determinánsból annak α és β indexű sora, továbbá α és β indexű oszlopa elhagyásával nyerünk.)

Példa. Legyen

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

akkor a fenti összefüggés alapján írható, hogy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

γ) Matrixszal való osztás. Kvadratikus matrix reciprokmatrixa

I°. A reciprokmatrix fogalma. A determináns fogalmának a matrixelmélet szempontjából való jelentősége először az osztás műveletének bevezetésénél mutatkozik. A skalároritmetikában az a számmal való osztás ekvivalens a reciprok értékével való szorzással. Az a szám reciprokát pedig az

$$ax = xa = 1$$

egyenlet definiálja, melyből nyilvánvaló, hogy csupán 0-tól különböző a számnak van reciproka.

Ennek alapján közelfekvő, hogy a matrixok osztásának általános tárgyalása előtt azt a kérdést vizsgáljuk meg, van-e adott $\mathbf{A}$ kvadratikus matrixnak reciproka, azaz van-e olyan $\mathbf{X}$ matrix, mely az

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E}, \text{ illetve } \mathbf{XA} = \mathbf{E}$$

egyenletek valamelyikét kielégíti. Látni fogjuk, hogy itt — ellentétben a skalárok körében való osztással — az a kikötés, hogy $\mathbf{A}$ ne legyen zérusmatrix, még nem elegendő a reciprok létezéséhez, hanem $\mathbf{A}$-ra nézve egy erősebb feltételt kell előírnunk. Ilyen feltételt nyerünk, ha az $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$, illetve $\mathbf{XA} = \mathbf{E}$ egyenletben szereplő matrixok determinánsaira térünk át és az (1.19) alaptulajdonságot felhasználjuk. Ekkor az

$$|\mathbf{AX}| = |\mathbf{E}|, \quad \text{illletőleg} \quad |\mathbf{XA}| = |\mathbf{E}|$$

egyenleteket nyerjük, amelyek bármelyikéből az következik, hogy:

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{X}| = |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{A}| = 1.$$

Tehát az $\mathbf{AX} = \mathbf{F}$, illetve $\mathbf{XA} = \mathbf{E}$ egyenletek bármelyikének csak akkor lehet megoldása, ha (azonkívül, hogy $\mathbf{A}$ nem zérusmatrix) az $\mathbf{A}$ matrix determinánsa nullától különböző.

Ki fogjuk mutatni, hogy a reciprokmatrix létezéséhez a $|\mathbf{A}| \neq 0$ feltétel elegendő; e feltétel teljesülése esetén az $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ és $\mathbf{XA} = \mathbf{E}$ egyenleteknek egyetlen közös megoldásuk van, tehát jobb oldali és bal oldali reciprokmatrix megkülönböztetése fölösleges, és az $\mathbf{A}^{-1}$ reciprokmatrix elemei a négy alapművelettel megszerkeszthetők $\mathbf{A}$ elemeiből.

II°. Az adjungált matrix fogalma. A reciprokmatrix meghatározása céljából először az „adjungált matrix" fogalmát vezetjük be. Jelöljük az $\mathbf{A}$ kvadratikus matrix determinánsát továbbra is $|\mathbf{A}|$-val és az a_{ij} elemhez határozó előjeles aldetermi-

nánst (az a_{ij} elem komplementer minorát) A_{ij}-vel. Ekkor az A_{ij} mennyiségekből alkotott alábbi matrixot az **A** matrix adjungáltjának nevezzük és „adj **A**"-val jelöljük:

$$\text{(1.25)} \qquad \operatorname{adj}\mathbf{A} = \operatorname{adj}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Külön kiemeljük, hogy **A** adjungáltja az $|\mathbf{A}|$ előjeles aldeterminánsaiból alkotott

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

matrixnak a *transzponáltja.*

Az adjungált matrix jellemző tulajdonságainak bemutatása végett képezzük az $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj}\mathbf{A}$ szorzatot:

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}A_{1\nu} & \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}A_{2\nu} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}A_{n\nu} \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}A_{1\nu} & \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}A_{2\nu} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}A_{n\nu} \\ . & . & \dots & . \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}A_{1\nu} & \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}A_{2\nu} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}A_{n\nu} \end{bmatrix}.$$

A determinánsok fentebb idézett (1.16) tulajdonsága alapján

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}A_{j\nu} = 0, \quad \text{ha } i \neq j, \quad \text{és}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}A_{i\nu} = |\mathbf{A}|,$$

ennek következtében:

$$\text{(1.26)} \qquad \mathbf{A} \cdot \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}.$$

Hasonlóképpen igazolható — a determinánsok idézett (1.16) tulajdonságából következő

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}A_{\nu j} = 0, \qquad (i \neq j); \quad \text{illetve} \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}A_{\nu i} = |\mathbf{A}|$$

összefüggések felhasználásával —, hogy

1.27) $$(\operatorname{adj}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}.$$

Példa. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, akkor a fentiek szerint:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 & -28 \\ 17 & -17 & -17 \\ -13 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Továbbá:

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -28 \\ 17 & -17 & -17 \\ -13 & -2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -85 & 0 & 0 \\ 0 & -85 & 0 \\ 0 & 0 & -85 \end{bmatrix} = -85 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E},$$

ugyanis jelen esetben:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -85.$$

Az $\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj}\mathbf{A} = (\operatorname{adj}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$ azonosságból kiolvasható a következő alapvető tétel:

2. tétel. Egy kvadratikus matrix a saját adjungáltjával mindig felcserélhető, és szorzatuk az egységmatrixtól csupán az $|\mathbf{A}|$ skalárszorzóban különbözik.

III°. A reciprokmatrix kiszámítása. Az (1.26), illetve (1.27) identitásból adódó

$$\frac{\mathbf{A}\cdot\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{(\operatorname{adj}\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\mathbf{E}$$

összefüggésből kitűnik, hogy az $\mathbf{AX}=\mathbf{E}$ és $\mathbf{XA}=\mathbf{E}$ egyenletek mindegyike ugyanazon $\mathbf{X}$ matrixszal kielégíthető, amennyiben $|\mathbf{A}|\neq 0$. Ekkor ugyanis az

$$\mathbf{X}=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

matrix mind a két egyenletet kielégíti, tehát a bal oldali és jobb oldali reciprokmatrixok megegyeznek, és közös értékük $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelölhető:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}. \tag{1.28}$$

Valamint az $ax=1$ egyenletnek nincs megoldása $a=0$ esetén, éppen úgy az $\mathbf{AX}=\mathbf{E}$ és $\mathbf{XA}=\mathbf{E}$ egyenleteknek sincs megoldásuk $|\mathbf{A}|=0$ esetén. Ennek megfelelően a nulla determinánssal bíró kvadratikus matrixokat nem invertálhatóknak (más szóval: szinguláriasaknak) fogjuk nevezni.

IV°. A reciprokmatrix legfontosabb tulajdonságai. Nyilvánvaló, hogy $|\mathbf{A}|\neq 0$ esetén a fentiek alapján $\mathbf{A}$-nak tetszőleges negatív egész kitevőjű hatványai($\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{-2}$, ...) is értelmezve vannak, és azok mind egymásközt, mind $\mathbf{A}$ pozitív egész kitevőjű hatványaival felcserélhetők.

Matrixszorzat reciprokának képzése a

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{1.29}$$

azonosság szerint történik, melynek helyességét a

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})=\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{E}$$

egyenlőségek igazolják.

V°. Matrix osztása. Tetszőleges matrixok osztását (nem szinguláris osztó esetén) a következőképpen értelmezzük:

Ha az osztás célja az $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ egyenlet megoldása $\mathbf{X}$-re, az osztás $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ alakban értelmezhető, viszont az $\mathbf{XA}=\mathbf{B}$ egyenlet megoldása során az osztást $\mathbf{X}=\mathbf{BA}^{-1}$-nel értelmezzük. Az osztás eredménye tehát függ az osztandó és az osztó sorrendjétől.

Példa. A II°. alatt bemutatott példában szereplő $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&7\\-1&4&5\\3&1&1\end{bmatrix}$ matrix reciproka a fentebb már kiszámított adjungált és determináns segítségével a következőképpen írható:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{1}{-85}\begin{bmatrix}3&7&-28\\17&-17&-17\\-13&-2&8\end{bmatrix}.$$

VI°. Eltérések a skalár- és matrixaritmetika között. Ha az a és b skalárok kielégítik az $a \neq 0$, $ab = 0$ relációkat, akkor ezekből természetesen $b = 0$ következik. Matrixok esetén $\mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{AB} = 0$-ból általában nem következik $\mathbf{B} = 0$. Ha azonban $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ létezik, és $\mathbf{AB} = 0$-ból $\mathbf{A}^{-1}$-nel való szorzással $\mathbf{B} = 0$ következik.

Ha az a, b és c skalárok kielégítik az $ac = bc = cb \neq 0$ relációkat, akkor ezekből nyilván $a = b$ következik, ha $c \neq 0$. Viszont az előbbivel analóg meggondolás azt mutatja, hogy $\mathbf{AC} = \mathbf{BC} \neq 0$-ból csak akkor következik $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, ha $|\mathbf{C}| \neq 0$. Az $\mathbf{AC} = \mathbf{CB} \neq 0$ relációkból pedig $|\mathbf{C}| \neq 0$ esetén sem következik általában $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ Mindamellett $|\mathbf{C}| \neq 0$ esetén az $\mathbf{AC} = \mathbf{CB}$, illetőleg $\mathbf{A} = \mathbf{CBC}^{-1}$ egyenletekkel összekapcsolt $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixok közt szoros kapcsolat áll fenn. Egyrészt: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{C}|\,|\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}|^{-1} = |\mathbf{B}|$. Másrészt, ha $\mathbf{A}_1 = \mathbf{CB}_1\mathbf{C}^{-1}$ és $\mathbf{A}_2 = \mathbf{CB}_2\mathbf{C}^{-1}$, akkor

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{C}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\mathbf{C}^{-1}; \qquad \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{CB}_1\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{CB}_2\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{CB}_1\mathbf{B}_2\mathbf{C}^{-1}.$$

Ha tehát az $\mathbf{A} = \mathbf{CBC}^{-1}$ kapcsolatban álló matrixokat *hasonlónak* nevezzük, és a vonatkozást $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$-vel jelöljük, akkor $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{B}_2$-ből $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \sim \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ következik. Minthogy továbbá valamely $\mathbf{A}$ matrixnak bármely skaláregyüttható $\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \mathbf{A}^\nu$ polinomja $\mathbf{A}$-ból összeadásokkal és szorzásokkal épül fel, tehát az előbbiek alapján érvényes a következő tétel:

3. tétel. Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ és $f(x)$ tetszőleges skalárpolinom, akkor

$$f(\mathbf{A}) \sim f(\mathbf{B}) \quad \text{és} \quad |f(\mathbf{A})| = |f(\mathbf{B})|. \tag{1.30}$$

Példa. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrixok a fentiek szerint „hasonlóak", az

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

mert az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, továbbá a $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrixok között valóban fennáll az

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

reláció. Legyen példának okáért $f(x) = x^2 - 2x + 3$, akkor

$$f(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + 3\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad |f(\mathbf{A})| = \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Továbbá:

$$f(\mathbf{B}) \equiv \mathbf{B}^2 - 2\mathbf{B} + 3\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad |f(\mathbf{B})| = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 12.$$

Tehát $|f(\mathbf{A})| = |f(\mathbf{B})| = 12.$

Példák

β | 1. Kiszámítandó az alábbi determináns értéke a Laplace-féle kifejtési szabály segítségével (legyen $k = 2$):

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 & -6 & 4 \\ -7 & 3 & -8 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -3 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & -8 \end{vmatrix}.$$

$$D = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -7 & -8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+2+5}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 5 & 2 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+3+5}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+4+5}\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 46 \cdot 24 - 15\,(-54) + (-54) \cdot (-24) - 40\,(-18) +$$
$$+ (-59) \cdot 33 - 10 \cdot 68 + (-4) \cdot (-41) + (-66) \cdot (-120) - 50 \cdot 117 +$$
$$+ (-4)\,92 = 1104 + 810 + 1296 + 720 - 1947 - 680 +$$
$$+ 164 + 7920 - 5850 - 368 = 3169.$$

2. Legyen adva a

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

negyedrendű determináns. Számítsuk ki $D_{22}D_{33} - D_{23}D_{32}$ kifejezés értékét.

Mivel $D_{22}D_{33} - D_{23}D_{32} = D_{\substack{23\\23}} \cdot D$, ezért kiszámítjuk $D_{\substack{23\\23}}$ és D értékeit.

$$D = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} -$$
$$- 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 40 - 4 \cdot 16 - (-7) =$$

$$= 45 + 80 - 64 + 7 = 68.$$

$$D_{\substack{23\\23}} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Tehát:

$$D_{22}D_{33} - D_{23}D_{32} = -272.$$

γ 1. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ matrix reciprokát.

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -41 & -17 \\ -41 & -39 & 7 \\ -17 & 7 & -11 \end{bmatrix}.$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -190. \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{190}\begin{bmatrix} 9 & 41 & 17 \\ 41 & 39 & -7 \\ 17 & -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Próba:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{190}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 41 & 17 \\ 41 & 39 & -7 \\ 17 & -7 & 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{190}\begin{bmatrix} 190 & 0 & 0 \\ 0 & 190 & 0 \\ 0 & 0 & 190 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

Figyeljük meg, hogy mind $\mathbf{A}$, mind $\mathbf{A}^{-1}$ szimmetrikus matrix.

2. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 30 & -15 & -4 \\ 46 & -23 & -6 \\ 24 & -11 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrixok hasonlóak, ahol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

és $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$. (Ez a 3. tételnek azon speciális esete, midőn $f(x) \equiv x$.)

$$|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1; \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{CBC}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -15 & -4 \\ 46 & -23 & -6 \\ 24 & -11 & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

és

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 30 & -15 & -4 \\ 46 & -23 & -4 \\ 24 & -11 & -5 \end{vmatrix} = -4; \qquad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

d) A kvadratikus matrix nyoma

Valamely

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kvadratikus matrix *„nyom"*-a alatt a főátlóban álló elemek összegét értjük. A „nyom" jelölésére mind a külföldi, mind a hazai szakirodalomban — a „nyom" német *(Spur)* vagy angol *(trace)* elnevezése után — általában a Sp **A** vagy Tr **A** jelölést használják. A definíció szerint:

$$\text{Sp}\,\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}. \tag{1.31}$$

A „nyom" fogalmának bevezetése igen hasznosnak bizonyul — többek közt — valamely kvadratikus matrix „karakterisztikus determinánsának" a kifejtése szempontjából. (Lásd az (1.21) képletet a 42. oldalon.) Később — az I. rész 3. §-ban és az I. rész 4. §-ban — látni fogjuk, hogy a $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ karakterisztikus determináns kifejtésével nyert ún. „karakterisztikus polinom" döntő fontosságú szerepet játszik a matrixszámítás elméletében és alkalmazásaiban. Minthogy azonban a karakterisztikus polinomnak a karakterisztikus determináns tényleges kifejtésével történő felírása nagyobb rendszám esetén igen hosszadalmas és fárasztó feladat, célszerű a következő eljárás alkalmazása (a képletek levezetését mellőzzük):

Számítsuk ki az **A** matrix $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$ hatványait (tudvalevőleg matrixok hatványozása számológépekkel aránylag gyorsan végezhető), és képezzük az alábbi kifejezéseket:

$$k_1 = -\text{Sp}\,\mathbf{A}$$

$$k_2 = -\frac{1}{2}(k_1\,\text{Sp}\,\mathbf{A} + \text{Sp}\,\mathbf{A}^2)$$

$$k_3 = -\frac{1}{3}(k_2\,\text{Sp}\,\mathbf{A} + k_1\,\text{Sp}\,\mathbf{A}^2 + \text{Sp}\,\mathbf{A}^3)$$

1.32) .....

$$k_n = -\frac{1}{n}(k_{n-1}\,\text{Sp}\,\mathbf{A} + k_{n-2}\,\text{Sp}\,\mathbf{A}^2 + \dots + k_1\,\text{Sp}\,\mathbf{A}^{n-1} + \text{Sp}\,\mathbf{A}^n)$$

A fenti (1.32) kifejezésekkel a „karakterisztikus polinom"

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + k_2\lambda^{n-2} + \ldots + k_{n-1}\lambda + k_n \tag{1.33}$$

alakban írható.

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

matrix karakterisztikus polinomja a fenti képletek segítségével a következőképpen nyerhető:

$$\operatorname{Sp}\mathbf{A} = 5 + 6 = 11; \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 31 & 22 \\ 33 & 42 \end{bmatrix}; \quad \operatorname{Sp}\mathbf{A}^2 = 31 + 42 = 73,$$

tehát

$$k_1 = -\operatorname{Sp}\mathbf{A} = -11$$

$$k_2 = -\frac{1}{2}(k_1 \operatorname{Sp}\mathbf{A} + \operatorname{Sp}\mathbf{A}^2) = -\frac{1}{2}(-11 \cdot 11 + 73) = 24,$$

következésképpen a karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 24.$$

Végül megjegyezzük, hogy ha az $\mathbf{A}$ matrix $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ *„karakterisztikus egyenletének"* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gyökei (amelyeket a későbbiekben majd a matrix *„sajátértékei"*-nek fogunk nevezni) ismeretesek, a matrix nyoma éppen ezek összegével egyenlő:

$$\operatorname{Sp}\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k. \tag{1.34}$$

(Többszörös gyökök előfordulása esetén mindegyik többszörös gyök annyiszor szerepel összeadandóként, amennyi a multiplicitása.)

e) Hipermatrixok és azokra értelmezett alapműveletek

α) A hipermatrix fogalma

Fentebb — az I. rész 1. § *b)* ε) I°-ban — láttuk, hogy bármely téglalap- (kvadratikus) matrixot vízszintes vagy függőleges egyenesdarabokkal sorokra vagy oszlopokra darabolhatunk fel, és az így nyert sorokat, ill. oszlopokat egy-egy sormatrix-, ill. oszlopmatrix-jelképpel jelölhetjük. Ily módon az eredeti téglalap- (kvadratikus) matrixot egy olyan „sormatrix" vagy „oszlopmatrix" alakjában írhatjuk, amelynek „elemei" nem skalárok, hanem oszlop-, ill. sormatrixok. Az idézett helyen láttuk, hogy ennek az írásmódnak a segítségével a matrixszorzatok előállítására az (1.2) képletnél lényegesen egyszerűbb összefüggésekre jutunk. (Lásd a 25—27. oldalakat.)

Gyakran (főként az alkalmazások szempontjából) célszerű az adott téglalap- (kvadratikus) matrixokat vízszintes és függőleges osztóvonalakkal oly módon rész-

matrixokra osztani, hogy a részmatrixok (az úgynevezett „blokkok") között téglalap- (kvadratikus) matrixok is legyenek. A részmatrixokat (blokkokat) ez esetben is egy-egy matrix-jelképpel jelölhetjük.

Valamely téglalap- (kvadratikus) matrix blokkokra való felosztását *„particionálás"*-nak nevezzük. A matrixfogalomnak azt az általánosítását pedig, amelynél az „elemek" maguk is (téglalap-, sor-, oszlop-) matrixok, *„hipermatrix"*-nak mondjuk. A hipermatrixok alkalmazása azzal a lényeges előnnyel jár, hogy olyan összefüggéseket, amelyek valamely **A** matrix összes $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nm}$ skalárelemeinek kiírásával csak nagyon hosszadalmasan, a direkt matrixjelekkel pedig egyáltalában nem fejezhetők ki, hipermatrixok segítségével rövidebb, jobban áttekinthető alakban lehet írni.

β) Hipermatrixok egyenlősége, összeadása, kivonása és szorzása

I°. Egyenlőség. Két hipermatrixot akkor mondunk egyenlőnek, ha a megfelelő helyen álló egyező indexszel bíró blokkjaik egyenlőek. Két blokk egyenlőségére nézve a közönséges matrixok egyenlőségére megállapított szabály érvényes (lásd a 21. oldalon).

II°. Összeadás, kivonás. Két hipermatrixot akkor adhatunk össze, illetve akkor vonhatunk ki egymásból, ha a két hipermatrix blokkjaiból alkotott „blokksorok", illetve „blokkoszlopok" száma megegyezik, és ha a megfelelő helyen álló (egyező indexű) blokkok skalárelemei ugyancsak egyforma számú „skalársort", illetve „skalároszlopot" alkotnak.

Ha két hipermatrix összeadható, ill. kivonható, akkor az összeadás, ill. kivonás ugyanúgy hajtható végre, mintha a blokkok skalárelemek lennének.

Számpéldaként írjunk fel két ötödrendű kvadratikus matrixot: $\mathbf{M}_1$-et és $\mathbf{M}_2$-t Particionáljuk mindkét matrixot négy blokkra, oly módon, hogy a megegyező helyzetű blokkok azonos „méretűek" legyenek:

$$\mathbf{M}_1 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]; \qquad \mathbf{M}_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Az egyes blokkok rövid jelölésére vezessük be a következő matrixjelképeket:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Továbbá — a matrixszámítás szokásos jelöléseivel — a másodrendű egységmatrixot $\mathbf{E}_2$-vel, a harmadrendű egységmatrixot $\mathbf{E}_3$-mal, a csupa nullából álló matrixot egyetlen nullával fogjuk jelölni. Ezekkel a jelölésekkel az $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ matrixok az alábbi rövid módon írhatók:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ hipermatrixok nyilván összeadhatók, illetve kivonhatók, mivel mindkettőnek két „blokksora" és két „blokkoszlopa" van, továbbá a megfelelő helyen álló blokkok skalárelemei ugyancsak egyforma számú „skalársort" és „skalároszlopot" alkotnak. Következésképpen:

$$\mathbf{M}_1 \pm \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{E}_3 & \mathbf{B} \pm \mathbf{X} \\ +\mathbf{Y} & \mathbf{E}_2 \pm \mathbf{Z} \end{bmatrix}.$$

III°. Két hipermatrix szorzata. Két hipermatrix csak akkor szorozható össze, ha a bal oldali tényezőnek pontosan annyi „blokkoszlopa" van, mint ahány „blokksora" van a jobb oldali tényezőnek, továbbá, ha a szorzás műveletének végrehajtásakor összeszorzandó blokkok *az adott sorrendben konformábilisak*. Ekkor a szorzás formálisan úgy hajtható végre, mintha a blokkok skalárelemek lennének, gondosan ügyelni kell azonban a tényezők sorrendjére!

Például a fentebb bevezetett $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ hipermatrixok mind az $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$ sorrendben, mind az $\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$ sorrendben összeszorozhatók. ($\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \neq \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$). Számítsuk ki például az $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$ szorzatot:

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_3 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z} \\ 0 \cdot \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{Z} & 0 \cdot \mathbf{X} + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{Z} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}.$$

Amint láthatjuk, az $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$ szorzat kiszámításához ennél az írásmódnál elegendő a következő közönséges matrixszorzatok kiszámítása:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mármost

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tehát a keresett $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$ szorzat részletesen kiírva:

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

E példa kidolgozása során már bizonyos mértékben megmutatkoznak a hipermatrix-írásmód előnyei. Ugyanis ahelyett, hogy a két ötödrendű kvadratikus matrixot közvetlenül összeszoroztuk volna, a kevesebb számolási munkát igénylő $\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ és $\mathbf{B} \cdot \mathbf{Z}$ matrixszorzatokat számítottuk ki. A számpéldából az is kitűnik, hogy a hipermatrix-írásmód alkalmazása esetén általában előnyös, ha a particionálást úgy tudjuk végrehajtani, hogy a blokkok közt zérusmatrixok és egységmatrixok is előfordulnak. (Megjegyzendő, hogy a műszaki eredetű matrixszámítási feladatok egyrészénél a hipermatrix-írásmód bevezetését a vizsgált mechanikai, villamos stb. rendszerek struktúrája teszi indokolttá, és ilyenkor a particionálás módját maga az adott feladat határozza meg. Ha azonban tetszésünk szerint oszthatunk fel blokkokra egy adott matrixot, akkor arra célszerű törekednünk, hogy a blokkok közt minél több zérusmatrix és egységmatrix szerepeljen.)

γ) „2×2 típusú" hipermatrix determinánsa és inverze

I°. A „2×2 típusú" hipermatrix értelmezése. A hipermatrixok egyik legegyszerűbb (és az alkalmazások szempontjából egyik legfontosabb) típusát a négy blokkra particionált, 2 blokksorból és 2 blokkoszlopból álló

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

alakú hipermatrixok alkotják, amelyeket röviden „2×2 típusú" hipermatrixoknak nevezhetünk. Az alábbiakban (részben bizonyítás nélkül) ismertetünk néhány összefüggést, amelyek segítségével egy „2×2 típusú" hipermatrix determinánsát, ill. inverzét a *blokkok rendszámával egyenlő rendszámú* determinánsokkal, ill. matrixokkal fejezhetjük ki.

II°. „2×2 típusú" hipermatrix determinánsa. Először foglalkozzunk azzal az esettel, amikor *a blokkok egyforma rendszámú kvadratikus* matrixok. Tegyük fel, hogy az n-ed rendű kvadratikus blokkokból álló

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

hipermatrixnak az $\mathbf{A}$ blokkja invertálható. Ez esetben a hipermatrixok szorzási szabályával könnyen igazolható, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{D} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}, \tag{1.35}$$

tehát a determinánsok szorzási tétele alapján:

$$\text{(1.36)} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{D}-\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \end{vmatrix},$$

továbbá a Laplace-féle kifejtési szabály (1.18) felhasználásával:

$$\text{(1.37)} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}|.$$

Teljesen analóg módon igazolható, hogy abban az esetben, ha a **D** blokk invertálható (a másik három blokk esetleg mind *szinguláris* n-ed rendű kvadratikus matrix), akkor

$$\text{(1.38)} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}|.$$

Ha mármost az **A**, **B**, **C**, **D** blokkok felcserélhetők, akkor mind az (1.37), mind az (1.38) képletből a következő összefüggésre jutunk:

$$\text{(1.39)} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}|.$$

Kimutatható, hogy az (1.39) egyenlet akkor is érvényes marad, ha sem az **A**, sem a **B** blokk nem invertálható.

Térjünk át most arra az általánosabb esetre, amikor az adott „2×2 típusú" hipermatrixnak csak a bal felső és a jobb alsó blokkja kvadratikus matrix (e kettő közül az egyik skalár is lehet). Ez esetben igazolható (a bizonyítást mellőzzük), hogy

$$\text{(1.40)} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}|, \quad \text{ha} \quad |\mathbf{A}| \neq 0,$$

illetve

$$\text{(1.41)} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{D}|\,|\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{C}|, \quad \text{ha} \quad |\mathbf{D}| \neq 0.$$

III°. „2×2 típusú" hipermatrix inverzének kiszámítása a blokkok inverzéből. (Aitken képletei.) Nagy rendszámú matrixok reciprokának a kiszámítását számos esetben oly módon könnyíthetjük meg, hogy az adott matrixot négy blokkra particionáljuk, és megkíséreljük az adott matrix reciprokát a blokkok reciprokából kiszámítani. Ily módon az adott matrix reciprokának a kiszámítását az eredetinél kisebb rendszámú matrixok invertálására redukálhatjuk, ami *nagy rendszámú* matrixok esetében figyelemre méltó előnyt jelent.

Ha valamely „2×2 típusú" hipermatrix inverzét a blokkok reciprokából akarjuk kiszámítani, akkor ehhez az szükséges, hogy *legalább a bal felső és a jobb alsó blokk kvadratikus* matrix legyen.

Ha az

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix}$$

hipermatrix **A** és **D** blokkja nem szinguláris kvadratikus matrixok (a **B** és **C** blokk tetszés szerinti, tehát akár nem kvadratikus matrix is lehet), akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{C})^{-1} & (\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{C} - \mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}^{-1} \\ (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{D})^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}. \tag{1.42}$$

Abban a speciális esetben, ha valamely matrixot oly módon particionálunk négy blokkra, hogy *mind a négy blokk nem szinguláris kvadratikus matrix*, akkor — ha a blokkok nem felcserélhetők — az (1.42) képlet helyett a következő egyszerűbb összefüggés alkalmazható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{C})^{-1} & (\mathbf{C} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A})^{-1} \\ (\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{D})^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

A fenti képletek — amelyek helyessége az adott hipermatrix és az illető képletből adódó reciprokmatrix összeszorzásával igazolható — A. C. Aitkentől származnak.

Ha az **A**, **B**, **C**, **D** blokkok olyan kvadratikus matrixok, amelyek egymással (szorzás szempontjából) páronként felcserélhetők, akkor az (1.43) képletből az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{C})^{-1} & -\mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{C})^{-1} \\ -\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{A}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{C})^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

összefüggés adódik.

Gyakran célszerű az adott matrixot úgy particionálni négy blokkra, hogy a jobb alsó „blokk" egyetlen skalár legyen; ebben az esetben a jobb felső blokk oszlopmatrix, a bal alsó blokk pedig sormatrix. Az így nyert hipermatrix reciprokának kiszámításához már csak egyetlen matrix (a bal felső sarokban álló blokk) invertálása szükséges. Ez esetben az (1.42) képletből az alábbi összefüggés adódik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c} & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A} - \frac{1}{d}\,\mathbf{b}\mathbf{c}^*\right)^{-1} & \frac{1}{d}\left(\frac{1}{d}\,\mathbf{b}\mathbf{c}^* - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{b} \\ (\mathbf{c}^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - d)^{-1}\,\mathbf{c}^*\mathbf{A}^{-1} & (d - \mathbf{c}^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})^{-1} \end{bmatrix}. \tag{1.45}$$

A fenti képletben szereplő $\mathbf{c}^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ kifejezés *sklár* menyiség; az $\left(\mathbf{A} - \frac{1}{d}\,\mathbf{b}\mathbf{c}^*\right)$ kvadratikus matrix inverze pedig a későbbiekben (második rész, 6. § *c)* β) bemutatott Sherman—Morrison-féle képlet felhasználásával az **A** matrix inverzéből is kiszámítható.

A fenti (1.42), (1.43), (1.44) és (1.45) képletek alkalmazása különösen célszerű abban az esetben, ha a numerikus számítások elvégzéséhez elektronikus számológép áll rendelkezésünkre.

A *kettőnél több* blokksort, ill. blokkoszlopot tartalmazó hipermatrixok determinánsának és inverzének a blokkok segítségével történő kiszámítása gyakorlatilag csak egyes speciális hipermatrixtípusoknál lehetséges. Az alábbiakban bemutatunk három olyan hipermatrixtípust, amelyek körében mind az összeadás, kivonás és szorzás, mind a determináns és inverz kiszámítása viszonylag egyszerű szabályok szerint végezhető.

δ) Speciális hipermatrixtípusok

I°. Diagonál-hipermatrixok (direkt összegként előállítható hipermatrixok). Fentebb láttuk, hogy a közönséges matrixokra (skalár elemekből álló matrixokra) értelmezett műveletek elvégzése jelentékenyen egyszerűsödik az úgynevezett diagonálmatrixok esetében. A diagonálmatrix fogalmának a hipermatrixokra való kiterjesztéseként diagonál-hipermatrixoknak nevezhetjük az olyan kvadratikus matrixokat, amelyek úgy vannak blokkokra particionálva, hogy a főátlóban álló blokkok mind kvadratikus matrixok, és *a főátlón kívül elhelyezkedő blokkok minden eleme nulla.*

A diagonál-hipermatrixok rövidebb jelölésére — a közönséges diagonálmatrixok jelölésével analóg módon — a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}_n \end{bmatrix} = \langle \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_n \rangle$$

írásmód alkalmazható. $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_n$ blokkok (általában különböző rendszámú) kvadratikus matrixok, a nullák pedig (kvadratikus vagy téglalap alakú) zérusmatrixokat jelentenek.

Például

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2,$$

ahol nyilván

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egyes szerzők a diagonál-hipermatrixokat a főátlóban álló blokkok „direkt összegének" is nevezik, és jelölésükre a

$$\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \dots + \mathbf{D}_n$$

jelképet használják.

A diagonál-hipermatrixok bizonyos mértékben hasonló tulajdonságokat mutatnak, mint a közönséges diagonálmatrixok. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \dots, \mathbf{A}_n \rangle$ és $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n \rangle$ diagonál-hipermatrixok *azonos helyzetű* blokkjainak „méretei" megegyeznek, azaz az $\mathbf{A}_i$ és $\mathbf{B}_i$ kvadratikus matrixok rendszáma egyenlő. Ebben az esetben könnyen igazolható, hogy

1.46) $$\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n \rangle \pm \langle \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n \rangle = \langle \mathbf{A}_1 \pm \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2 \pm \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}_n \pm \mathbf{B}_n \rangle$$

és

1.47) $$\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n \rangle \cdot \langle \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n \rangle = \langle \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n \rangle.$$

Mint említettük, azonos rendszámú közönséges (skalár elemekből álló) diagonálmatrixok a szorzás szempontjából *mindig* felcserélhetők. Az **A** és **B** diagonál-hipermatrixok azonban *csakis akkor* cserélhetők fel, ha az azonos helyzetű blokkok a szorzás szempontjából felcserélhetők.

Valamely $\mathbf{A} = \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rangle$ diagonálmatrix determinánsa a blokkok determinánsainak szorzatával egyenlő:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| \cdot |\mathbf{A}_2| \ldots |\mathbf{A}_n| .$$

Továbbá, ha a diagonál-hipermatrix *valamennyi* főátlóbeli blokkjának van reciproka, akkor

1.48) $$\mathbf{A}^{-1} = \langle \mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1}, \ldots, \mathbf{A}_n^{-1} \rangle .$$

Végül ideiktatjuk a diagonál-hipermatrixok hatványainak és skaláregyüttható racionális egész függvényeinek (polinomjainak) képzésére vonatkozó egyszerű szabályokat. (E szabályok helyességéről ugyancsak szorzás segítségével győződhetünk meg.)

(1.49) $$\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rangle^m = \langle \mathbf{A}_1^m, \mathbf{A}_2^m, \ldots, \mathbf{A}_n^m \rangle ,$$

(1.50) $$\{S_m \langle \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rangle\} = \langle S_m(\mathbf{A}_1), S_m(\mathbf{A}_2), \ldots, S_m(\mathbf{A}_n) \rangle ,$$

ahol az $S_m(\mathbf{A})$ jelkép az

$$S_m(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \ldots + c_m\mathbf{A}^m$$

skaláregyüttható matrixpolinomot jelenti. (Lásd a 30. oldalt.)

II°. Direkt szorzatok. A hipermatrixok egy további speciális típusát képviselik azok az (általában *nem* kvadratikus) hipermatrixok, amelyek két adott közönséges matrixból oly módon nyerhetők, hogy az egyik matrixnak minden elemét megszorozzuk a másik matrixszal.

Például az

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \hline 0 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & -1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

hipermatrixot úgy állíthatjuk elő, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrix mindegyik elemét (a matrixnak skalárral való szorzási szabálya szerint) megszorozzuk a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrixszal.

Azt a műveletet, amelynek során az **A** matrix minden egyes elemét megszorozzuk a **B** matrixszal, *„direkt szorzás"*-nak, a művelet eredményeként kapott hipermatrixot pedig az **A** és **B** matrixok direkt szorzatának nevezik. A direkt szorzat rövid jelölésére többek közt az $\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \times \mathbf{A}$ vagy az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ jelképet szokták használni. Az $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, ill. $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ írásmód alkalmazása esetén a kereszt alakú szorzójel melletti pontot

arra az oldalra tesszük, ahol az a matrix áll, amellyel a másik matrix elemeit megszorozzuk. Tehát, ha az $\mathbf{A}$ matrix elemeit a_{ik}-val jelöljük, akkor

$$\mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B} = [a_{ik}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \tag{1.51}$$

továbbá

$$\mathbf{B}\cdot\times\mathbf{A} = [\mathbf{B}a_{ik}] = [a_{ik}\mathbf{B}] = \mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B}\,.$$

Viszont, ha a $\mathbf{B}$ matrix elemeinek jelölésére a b_{pq} jelképet használjuk, nyilván

$$\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\cdot\,\mathbf{A} = [b_{pq}\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} b_{11}\mathbf{A} & b_{12}\mathbf{A} & \dots & b_{1s}\mathbf{A} \\ b_{21}\mathbf{A} & b_{22}\mathbf{A} & \dots & b_{2s}\mathbf{A} \\ & & & \\ b_{r1}\mathbf{A} & b_{r2}\mathbf{A} & \dots & b_{rs}\mathbf{A} \end{bmatrix}. \tag{1.52}$$

(A fentiek alapján evidens, hogy ha az $\mathbf{A}$ matrixnak m sora és n oszlopa, a $\mathbf{B}$ matrixnak pedig r sora és s oszlopa van, akkor az $\mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B}$ matrix sorainak száma $m\times r$, oszlopainak száma pedig $n\times s$.) Az $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ írásmód használata esetén előre meg kell állapodni abban, hogy melyik matrixszal szorozzuk meg a másik elemeit.

A direkt szorzat definíciójából következik, hogy adott esetben oszlopmatrixokat, ill. sormatrixokat is előállíthatunk direkt szorzat alakjában. Például

$$\begin{bmatrix} a \\ a\varepsilon \\ a\bar{\varepsilon} \\ b \\ b\varepsilon \\ b\bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \\ b\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

A direkt szorzás bevezetése lehetővé teszi, hogy a hipermatrixok körében bizonyos műveleteket egyszerűbben végezhetünk el, mint a szokványos jelölések alkalmazása esetén.

Két direkt szorzat *szorzatát* a következő szabály szerint képezhetjük:

$$(\mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B})\,(\mathbf{C}\times\cdot\,\mathbf{D}) = (\mathbf{AC})\times\cdot\,(\mathbf{BD})\,. \tag{1.53}$$

Ennek a szabálynak természetesen csak akkor van értelme, ha az $\mathbf{AC}$ és $\mathbf{BD}$ közönséges matrixszorzatok léteznek, azaz, ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$, illetve a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{D}$ matrixok *az adott sorrendben* összeszorozhatók.

Ha mind az $\mathbf{A}$, mind a $\mathbf{B}$ matrix kvadratikus, és mindkettőnek van inverze, akkor az $\mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B}$ hipermatrix inverzét a következő képlet szolgáltatja:

$$(\mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})\times\cdot\,(\mathbf{B}^{-1})\,. \tag{1.54}$$

A fenti képlet helyessége az (1.53) szorzási szabály felhasználásával könnyen igazolható.

Ha $\mathbf{A}$ n-ed rendű, $\mathbf{B}$ pedig m-ed rendű kvadratikus matrix, akkor az $\mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B}$ direkt szorzat *determinánsa* a tényezők $|\mathbf{A}|$ és $|\mathbf{B}|$ determinánsából a következőképpen nyerhető:

$$\det(\mathbf{A}\times\cdot\,\mathbf{B}) = |\mathbf{A}|^m\cdot|\mathbf{B}|^n$$

A matrixszámítás elektrotechnikai alkalmazásaiban jelentős szerepet játszanak az $\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \times \cdot \mathbf{Q}$ általános alakban előállítható hipermatrixok. Itt $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ *azonos rendszámú* (egyébként tetszés szerinti) kvadratikus matrixokat jelentenek, $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ pedig a következő *projektor*matrixok:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A fenti $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ matrixok projektortulajdonsága szorzással könnyen igazolható, ugyanis

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

és

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}.$$

Továbbá az is könnyen bebizonyítható, hogy

(1.55) $$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{E},$$

azaz a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ projektorok összege éppen a harmadrendű egységmatrixszal egyenlő, és

(1.56) $$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} = 0.$$

Valamely $\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \times \cdot \mathbf{Q}$ alakban előállítható hipermatrix reciproka a következő egyszerű összefüggésből nyerhető

(1.57) $$(\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \times \cdot \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B}^{-1} \times \cdot \mathbf{Q}.$$

Továbbá a direkt szorzatok (1.53) szorzási szabályának segítségével könnyen kimutatható, hogy

(1.58) $$(\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \times \cdot \mathbf{Q})^m = \mathbf{A}^m \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B}^m \times \cdot \mathbf{Q},$$

és

(1.59) $$S_m(\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \times \cdot \mathbf{Q}) = S_m(\mathbf{A}) \times \cdot \mathbf{P} + S_m(\mathbf{B}) \times \cdot \mathbf{Q},$$

ahol $S_m(\mathbf{X}) = c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{X} + c_2\mathbf{X}^2 + \ldots + c_m\mathbf{X}^m$.

Az $\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \times \cdot \mathbf{Q}$ alak hipermatrixokra vonatkozó fenti összefüggések jól értékesíthetők azokkal az (elektrotechnikai alkalmazásokban fontos szerepet játszó) hipermatrixokkal kapcsolatos feladatok megoldásánál, amelyek csupa *harmadrendű*

szimmetrikus ciklikus blokkból állnak. Ugyanis bármely *harmadrendű szimmetrikus ciklikus matrix* felírható a következő alakban:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0 + 2a_1)\,\mathsf{P} + (a_0 - a_1)\,\mathsf{Q}\,. \tag{1.60}$$

(Az a_0 és a_1 elemek nemcsak valós, hanem komplex számok is lehetnek; félreértések elkerülése végett felhívjuk az olvasó figyelmét arra a körülményre, hogy most *komplex elemek esetén is szimmetrikus* matrixról — és nem hermitikus matrixról — van szó!)

$\mathsf{P}\cdot\mathsf{P} = \mathsf{P}$, $\mathsf{Q}\cdot\mathsf{Q} = \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} + \mathsf{Q} = \mathsf{E}$, $\mathsf{PQ} = \mathsf{QP} = 0$ összefüggésekből automatikusan következik, hogy ha $a_0 + 2a_1 \neq 0$ és $a_0 - a_1 \neq 0$,

$$\{(a_0 + 2a_1)\,\mathsf{P} + (a_0 - a_1)\,\mathsf{Q}\}^{-1} = \frac{1}{a_0 + 2a_1}\,\mathsf{P} + \frac{1}{a_0 - a_1}\,\mathsf{Q}\,, \tag{1.61}$$

és

$$\{(a_0 + 2a_1)\,\mathsf{P} + (a_0 - a_1)\,\mathsf{Q}\}^m = (a_0 + 2a_1)^m\,\mathsf{P} + (a_0 - a_1)^m\,\mathsf{Q}, \tag{1.62}$$

tehát a harmadrendű szimmetrikus ciklikus matrixok (1.60) alakú előállítása a matrixok reciprokának és hatványainak igen egyszerű kiszámítását teszi lehetővé.

Az $\mathsf{A}\times\cdot\mathsf{P} + \mathsf{B}\times\cdot\mathsf{Q}$ alakú hipermatrixokra felírt fenti összefüggések alkalmazására a következő példát mutatjuk be: Az

$$\mathsf{M} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_0 & x_1 & x_1 & y_0 & y_1 & y_1 \\ x_1 & x_0 & x_1 & y_1 & y_0 & y_1 \\ x_1 & x_1 & x_0 & y_1 & y_1 & y_0 \\ \hline y_0 & y_1 & y_1 & z_0 & z_1 & z_1 \\ y_1 & y_0 & y_1 & z_1 & z_0 & z_1 \\ y_1 & y_1 & y_0 & z_1 & z_1 & z_0 \end{array}\right]$$

matrix nyilván

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} (x_0 + 2x_1)\,\mathsf{P} + (x_0 - x_1)\,\mathsf{Q} & (y_0 + 2y_1)\,\mathsf{P} + (y_0 - y_1)\,\mathsf{Q} \\ (y_0 + 2y_1)\,\mathsf{P} + (y_0 - y_1)\,\mathsf{Q} & (z_0 + 2z_1)\,\mathsf{P} + (z_0 - z_1)\,\mathsf{Q} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 + 2x_1 & y_0 + 2y_1 \\ y_0 + 2y_1 & z_0 + 2z_1 \end{bmatrix}\times\cdot\,\mathsf{P} + \begin{bmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{bmatrix}\times\cdot\,\mathsf{Q}$$

alakba írható át. Következésképpen például az M matrix inverze az (1.57) képlet szerint

$$\mathsf{M}^{-1} = \frac{1}{D_1}\begin{bmatrix} z_0 + 2z_1 & -(y_0 + 2y_1) \\ -(y_0 + 2y_1) & x_0 + 2x_1 \end{bmatrix}\times\cdot\,\mathsf{P} +$$

$$+ \frac{1}{D_2}\begin{bmatrix} z_0 - z_1 & -(y_0 - y_1) \\ -(y_0 - y_1) & x_0 - x_1 \end{bmatrix}\times\cdot\,\mathsf{Q}$$

alakú, ahol

$$D_1 = (x_0 + 2x_1)(z_0 + 2z_1) - (y_0 + 2y_1)^2; \qquad D_2 = (x_0 - x_1)(z_0 - z_1) - (y_0 - y_1)^2.$$

III°. „$n \times n$" típusú, felcserélhető blokkokból álló hipermatrix determinánsa és inverze. A „2×2 típusú" hipermatrixok értelmezésével analóg módon „$n\times n$ típusú"-nak nevezzük az olyan hiper-

matrixot, amelynek n blokksora és n blokkoszlopa van. Abban az esetben, ha valamely „$n \times n$ típusú" hipermatrix blokkjai mind egymással (szorzás szempontjából) páronként felcserélhető (egyforma rendszámú) kvadratikus matrixok, az illető hipermatrix determinánsának és reciprokának kiszámítására viszonylag egyszerű és a közönséges matrixokra érvényes képletekkel analóg összefüggések írhatók fel. (A blokkok felcserélhetőségének előnyei már a „2×2 típusú" hipermatrixok inverzének felírásánál is megmutatkoztak; vö. az (1.43) és az (1.44) képletet. Egy direkt szorzatot is mindig felírhatunk egyetlen olyan hipermatrixként, amelynek blokkjai mind egymással páronként felcserélhető kvadratikus matrixok; a direkt szorzatokra érvényes viszonylag egyszerű számítási szabályok is a blokkok felcserélhetőségén alapulnak.)

A felcserélhető blokkokból álló „$n \times n$ típusú" hipermatrixok determinánsának és inverzének egyszerűbb felírása érdekében célszerű bevezetni a *„hiperdeterminánsʺ* és a *„hiperadjungáltʺ* fogalmát. Valamely $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ „$n \times n$ típusú", felcserélhető blokkokból álló hipermatrix *„hiperdeterminánsa"* (jelképe: $\det \mathbf{A}$ vagy $\det [\mathbf{A}_{ij}]$), ill. *„hiperadjungáltja"* (jelképe: $\mathrm{adj}\, \mathbf{A}$ vagy $\mathrm{adj}\, [\mathbf{A}_{ij}]$) az $\mathbf{A}_{ij}$ blokkoknak *ugyanolyan alakú* kifejezése, mint valamely közönséges $[a_{ij}]$ matrix determinánsa, ill. adjungáltja az a_{ij} skalárelemeknek. Például a *felcserélhető* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ blokkokból álló, „2×2 típusú"

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

hipermatrix hiperdeterminánsa és hiperadjungáltja:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{AD} - \mathbf{BC}\,; \qquad \mathrm{adj} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Tehát jelen esetben a hiperdeterminánsegy olyan közönséges kvadratikus *matrix*, amelynek rendszáma a blokkok rendszámával egyenlő, a hiperadjungált pedig egy „2×2 típusú hipermatrix". A hiperdeterminánsés hiperadjungált fogalmának bevezetésével a felcserélhető blokkokból álló „2×2 típusú" hipermatrixok inverzének (1.44) képlete

$$(1.63) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \left\{ \mathrm{adj} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \cdot \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

alakban is írható. Az (1.39) képletből viszont az derül ki, hogy a felcserélhető blokkokból álló „2×2 típusú" hipermatrixok *determinánsa* éppen az $\mathbf{AD} - \mathbf{BC}$ hiperdeterminánsés (ami egy kvadratikus matrix!) determinánsa:

$$(1.64) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = det \left\{ \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right\}.$$

Mármost kimutatható, hogy valamely *„$n \times n$ típusú"* felcserélhető m-ed rendű kvadratikus blokkokból álló $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$ hipermatrix inverze és determinánsa — az (1.63) és (1.64) képletekkel analóg módon — a következőképpen nyerhető:

$$(1.65) \qquad [\mathbf{A}_{ij}]^{-1} = \{\mathrm{adj}\ [\mathbf{A}_{ij}]\} \{\mathbf{E}_n \times \cdot \det\ [\mathbf{A}_{ij}]\}^{-1},$$

továbbá

$$(1.66) \qquad \det [\mathbf{A}_{ij}] = \det \{\det [\mathbf{A}_{ij}]\}.$$

Az általános esetben a *hiperadjungált* (az eredeti hipermatrixhoz hasonlóan) m-ed rendű blokkokból álló „$n \times n$ típusú" *hipermatrix*, a *hiperdeterminánsa* pedig m-ed rendű *közönséges matrix*. Ily módon az adott hiperdeterminánsa inverzének, illetve determinánsának kiszámítását egy, *a blokkok rendszámával egyenlő rendszámú* közönséges matrix inverzének illetve determinánsának a kiszámítására vezetjük vissza.

Például a

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

hipermatrix inverzét a fenti (1.65) és (1.66) képletek segítségével a következőképpen számíthatjuk ki:

Bevezetve a

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jelöléseket, a $\mathbf{H}$ hipermatrixot a következő alakban írhatjuk:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{E} & 0 \\ -\mathbf{E} & \mathbf{G} & -\mathbf{E} \\ 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{G} \end{bmatrix}.$$

Következésképpen

$$\operatorname{adj} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{G}^2 - \mathbf{E} & \mathbf{G} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} & \mathbf{G}^2 & \mathbf{G} \\ \mathbf{E} & \mathbf{G} & \mathbf{G}^2 - \mathbf{E} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 16 & -8 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 17 & -8 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 16 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -1 & 0 & 17 & -8 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -8 & 18 & -8 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -8 & 17 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 16 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -8 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & -8 & 16 \end{array}\right]$$

és

$$\det \mathbf{H} = \mathbf{G}^3 - 2\mathbf{G} = 4\begin{bmatrix} 17 & -12 & 3 \\ -12 & 20 & -12 \\ 3 & -12 & 17 \end{bmatrix}; \quad (\det \mathbf{H})^{-1} = \frac{1}{224}\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 6 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Tehát az (1.65) képlet alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{H}^{-1} = (\operatorname{adj} \mathbf{H})\,(\mathbf{E} \times \cdot \det \mathbf{H})^{-1} = \tag{1.67}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{G}^2 - \mathbf{E} & \mathbf{G} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} & \mathbf{G}^2 & \mathbf{G} \\ \mathbf{E} & \mathbf{G} & \mathbf{G}^2 - \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{G}^3 - 2\mathbf{G})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{G}^3 - 2\mathbf{G})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{G}^3 - 2\mathbf{G})^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{224}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 67 & 22 & 7 & 22 & 14 & 6 & 7 & 6 & 3 \\ 22 & 74 & 22 & 14 & 28 & 14 & 6 & 10 & 6 \\ 7 & 22 & 67 & 6 & 14 & 22 & 3 & 6 & 7 \\ \hline 22 & 14 & 6 & 74 & 28 & 10 & 22 & 14 & 6 \\ 14 & 28 & 14 & 28 & 84 & 28 & 14 & 28 & 14 \\ 6 & 14 & 22 & 10 & 28 & 74 & 6 & 14 & 22 \\ \hline 7 & 6 & 3 & 22 & 14 & 6 & 67 & 22 & 7 \\ 6 & 10 & 6 & 14 & 28 & 14 & 22 & 74 & 22 \\ 3 & 6 & 7 & 6 & 14 & 22 & 7 & 22 & 67 \end{array}\right].$$

Példák[7]

β | 1. Adjuk össze az alábbi két hipermatrixot:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 7 & -1 \\ -1 & 5 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 4 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right];$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 4 & 9 & 7 & -3 \\ 2 & -6 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ \hline 4 & 7 & -2 & 9 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & -7 & 8 & 0 \end{array}\right].$$

[7] Kényelmi szempontból olykor célszerű a matrixokat mértani sikidomokkal (négyzet, téglalap, háromszög, trapéz) jelképezni; ilyen jeleket használtunk pl. a 19. oldalon az ún. „háromszögmatrixok" jelölésére. Továbbá szokás a matrixok elemeit olyan téglalapokba (négyzetekbe) beírni, amelyek oldalhosszai az illető matrixok „méreteit" szemléltetik. Az alábbi példákban a hipermatrixokat illetve a blokkokat a sorok és oszlopok számával arányos oldalhosszúságú négyzetekben, ill. téglalapokban helyezzük el.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12}+\mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21}+\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22}+\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rr|rrr} -3 & 7 & 13 & 14 & -4 \\ 1 & -1 & 6 & 10 & 10 \\ 5 & 7 & -3 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 7 & -2 & 8 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 7 & 13 \\ 6 & 12 & 3 & 2 & 7 \\ -1 & 11 & -9 & 11 & -5 \end{array}\right].$$

2. Végezzük el az alábbi szorzást:

$$\left[\begin{array}{r|rrr} 3 & -1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & 3 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{r|rrr} 5 & 2 & -3 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 3\cdot 5 + [-1,2,5]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} & 3[2,-3,-1] + [-1,2,5]\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} 5 + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}[2,-3,-1] + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 15 + (-13) & [6,-9,-3] + [7,35,15] \\ \hline \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -15 \\ -17 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & -12 & -4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 23 & 8 & -4 \\ 57 & 29 & -39 \\ 62 & 46 & -48 \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 2 & 13 & 26 & 12 \\ \hline 11 & 31 & -4 & -8 \\ -10 & 59 & 26 & -40 \\ -7 & 66 & 40 & -50 \end{array}\right].$$

3. Végezzük el az előbbi szorzást fordított sorrendben is.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 5 & 2 & -3 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & -1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & 3 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 5 \cdot 3 + [2, -3, -1] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & 5[-1, 2, 5] + [2, -3, -1] \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} 3 + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} [-1, 2, 5] + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 15 + 3 & [-5, 10, 25] + [-22, 17, -9] \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -14 \\ 25 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -22 & -3 & -6 \\ 4 & -7 & 4 \\ 42 & -59 & 33 \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 18 & -27 & 27 & 16 \\ \hline 4 & -22 & -3 & -6 \\ -11 & 23 & -5 & 9 \\ 16 & 45 & -65 & 18 \end{array}\right].$$

4. Számítsuk ki az alábbi hipermatrix determinánsát:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -4 & 6 & -3 \\ -4 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right].$$

Mivel a blokkok ciklikusak, ezért szorzás szempontjából felcserélhetők. Így alkalmazható a hipermatrix determinánsára vonatkozó számolási szabály:

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = |\mathbf{AD} - \mathbf{BC}|.$$

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21 & -24\\ -24 & 21\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -4\\ -4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & -20\\ -20 & -4\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AD} - \mathbf{BC} = \begin{bmatrix}21 & -24\\ -24 & 21\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4 & -20\\ -20 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25 & -4\\ -4 & 25\end{bmatrix}.$$

$$|\mathbf{AD} - \mathbf{BC}| = \begin{vmatrix}25 & -4\\ -4 & 25\end{vmatrix} = 609.$$

5. Számítsuk ki az előbbi feladatban szereplő hipermatrix reciprokát:

$$\operatorname{adj}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D} & -\mathbf{B}\\ -\mathbf{C} & \mathbf{A}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -3 & -5 & -1\\ -3 & 6 & -1 & -5\\ \hline 0 & 4 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -3 & 2\end{array}\right].$$

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = \mathbf{AD} - \mathbf{BC} = \begin{bmatrix}25 & -4\\ -4 & 25\end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{AD} - \mathbf{BC})^{-1} = \frac{1}{609}\begin{bmatrix}25 & 4\\ 4 & 25\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1} = \operatorname{adj}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(\mathbf{AD} - \mathbf{BC})^{-1} & 0\\ 0 & (\mathbf{AD} - \mathbf{BC})^{-1}\end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -3 & -5 & -1\\ -3 & 6 & -1 & -5\\ \hline 0 & 4 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -3 & 2\end{array}\right]\cdot\frac{1}{609}\left[\begin{array}{cc|cc} 25 & 4 & 0 & 0\\ 4 & 25 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 25 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 25\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{609}\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 25 \end{bmatrix} + 0 & 0 + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 25 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 25 \end{bmatrix} + 0 & 0 + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 25 \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{609}\left[\begin{array}{cc|cc} 138 & -51 & -129 & -45 \\ -51 & 138 & -45 & -129 \\ \hline 16 & 100 & 38 & -67 \\ 100 & 16 & -67 & 38 \end{array}\right].$$

6. Számítsuk ki az alábbi harmadrendű ciklikus blokkokból álló hipermatrix reciprokát:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

Jelen esetben:

$$x_0 = 3, \qquad x_1 = 5,$$
$$y_0 = -2, \qquad y_1 = 1,$$
$$z_0 = 4, \qquad z_1 = 2.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13}\mathbf{P} - \frac{2}{13}\mathbf{Q} & -\frac{3}{13}\mathbf{Q} \\ -\frac{3}{13}\mathbf{Q} & \frac{1}{8}\mathbf{P} + \frac{2}{13}\mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - \mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{13}\mathbf{P}-\frac{2}{13}\mathbf{Q}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}-\frac{2}{39}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{39}\begin{bmatrix}-3&3&3\\3&-3&3\\3&3&-3\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

$$-\frac{3}{13}\mathbf{Q}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{8}\mathbf{P}+\frac{2}{13}\mathbf{Q}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}+\frac{2}{39}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{13}{213}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}+\frac{16}{312}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{312}\begin{bmatrix}45&-3&-3\\-3&45&-3\\-3&-3&45\end{bmatrix}=\frac{1}{104}\begin{bmatrix}15&-1&-1\\-1&15&-1\\-1&-1&15\end{bmatrix}.$$

A végeredmény:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{B}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\multicolumn{3}{c|}{\multirow{2}{*}{$\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$}}&\multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{$\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$}}\\&&&&&&\\\hline\multicolumn{3}{c|}{\multirow{2}{*}{$\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$}}&\multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{$\frac{1}{104}\begin{bmatrix}15&-1&-1\\-1&15&-1\\-1&-1&15\end{bmatrix}$}}\\&&&&&&\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{104}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-8&8&8&-16&8&8\\-8&-8&8&8&-16&8\\8&8&-8&8&8&-16\\\hline-16&8&8&15&-1&-1\\8&-16&8&-1&15&-1\\8&8&-16&-1&-1&15\end{array}\right].$$

2. §. VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGÉSE. MATRIX DIADIKUS FELBONTÁSA. MATRIX RANGJA ÉS A RANGSZÁM ALAPJÁN LEVONHATÓ KÖVETKEZTETÉSEK

a) Vektorok lineáris függése

Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vektorokat akkor mondjuk lineárisan függetleneknek, ha az

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots . x_r\mathbf{u}_r = 0 \tag{2.1}$$

egyenlet fennállásából $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$ következik. Ha viszont az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vektorok közt fennálló olyan (2.1) alakú egyenlet, melyben nem mindegyik x_i skalár együttható nulla, akkor azt mondjuk, hogy a vektorok közt lineáris összefüggés van.

A vektorok lineáris függése annyit is jelent, hogy a szóban forgó vektorok valamelyike, pl. $\mathbf{u}_i$ a többiek segítségével

$$\mathbf{u}_i = -\frac{x_1}{x_i}\mathbf{u}_1 - \frac{x_2}{x_i}\mathbf{u}_2 - \ldots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\mathbf{u}_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i}\mathbf{u}_{i+1} \ldots - \frac{x_r}{x_i}\mathbf{u}_r \tag{2.2}$$

alakban kifejezhető.

Ha a matrixszámításban vektoroknak nevezett oszlop- (és sor-) matrixokat síkbeli vektorokkal (két elemből álló oszlop- és sormatrixok esetén) vagy a háromméretű tér vektoraival (három elemből álló oszlop- és sormatrixok esetén) szemléltetjük, a lineáris függés a következőképpen interpretálható: A síkban 2 darab kétdimenziós vektor: $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ közt csak akkor van lineáris összefüggés, ha ezek a vektorok párhuzamosak. A háromméretű térben 3 darab vektor: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ és $\mathbf{u}_3$ közt csak akkor van lineáris összefüggés, ha mindhárom vektor egy és ugyanazon síkkal párhuzamos.

Például az

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok (a háromdimenziós tér oszlopmatrix alakban írt egységvektorai) lineárisan függetlenek, mert

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

fennállásából nyilván $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ következik. Ellenben az

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektorok lineárisan függenek (ami mértanilag annyit jelent, hogy az $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ oszlopmatrixokkal megadott háromdimenziós vektorok egy síkban vannak), mert

$$1 \cdot \mathbf{u}_1 + 2 \cdot \mathbf{u}_2 - 1 \cdot \mathbf{u}_3 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Matrix diadikus felbontása

Az I. §-ban (1.4; 1.5) bevezettük két vektor diadikus szorzatának vagy röviden diádnak a fogalmát. A két vektor diadikus szorzása által nyert matrixtípusnak hasonló szerepe van az általános matrixok között, mint két egyváltozós függvény szorzatának az általános kétváltozós függvények körében. Valamint az általános kétváltozós függvényeket az analízisben igyekszünk egyváltozós függvények szorzatainak összegére felbontani, éppúgy a matrixelméletben egy általános matrixot fel fogunk bontani diádok összegére. A diádösszegre való felbontásnak egyik (az alábbiakra nézve igen fontos) módja a következő:

Ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

nem zérusmatrix, azaz van legalább egy nullától különböző eleme, pl. a β_1-edik sorban és γ_1-edik oszlopban álló $a_{\beta_1\gamma_1}$ elem, akkor képezhető az

$$\mathbf{A} - \frac{1}{a_{\beta_1\gamma_1}} \begin{bmatrix} a_{1\gamma_1} \\ a_{2\gamma_1} \\ \vdots \\ a_{n\gamma_1} \end{bmatrix} [a_{\beta_1 1}, a_{\beta_1 2}, \dots, a_{\beta_1 m}] = \mathbf{A} - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \mathbf{A}' \tag{2.3}$$

matrix; ezen $\mathbf{A}'$ matrix γ_1-edik oszlopa és β_1-edik sora csupa 0 elemet tartalmaz.

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix}$$

matrix harmadik sorában és ötödik oszlopában álló $a_{35} = -5$ elemet választva ki:

$$\mathbf{A} - \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}[-1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -5] =$$

$$= \mathbf{A} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}[1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}'.$$

Ha a fenti módon nyert $\mathbf{A}' = [a'_{ij}]$ matrix nem zérusmatrix, azaz van legalább egy nullától különböző eleme, pl. a β_2-edik sorban és a γ_2-edik oszlopban álló $a'_{\beta_2\gamma_2}$ elem, akkor képezhető a

$$\mathbf{A}' - \frac{1}{a'_{\beta_2\gamma_2}}\begin{bmatrix} a'_{1\gamma_2} \\ a'_{2\gamma_2} \\ \vdots \\ a'_{n\gamma_2} \end{bmatrix}[a'_{\beta_21}, a'_{\beta_22}, \ldots, a'_{\beta_2 m}] = \mathbf{A}' - \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \mathbf{A}'' \tag{2.4}$$

matrix, melynek γ_1-edik és γ_2-edik oszlopai és β_1-edik és β_2-edik sorai csupa 0 elemet tartalmaznak.

Például a fentebb kiszámított $\mathbf{A}'$ matrix első sorában és negyedik oszlopában álló a'_{14} elemet választva ki:

$$\mathbf{A}' - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}[2, \ 1, \ 3, \ 1, \ 0] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}''.$$

A (2.3) és (2.4) összefüggések szerint írhatjuk, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \mathbf{A}''$. Nyilvánvaló, hogy amennyiben $\mathbf{A}''$ nem zérusmatrix, azaz van legalább egy nullától különböző eleme, akkor a fent ismertetett módon e nullától különböző elem sorából és oszlopából egy diád képezhető, amelyet $\mathbf{A}''$-ből kivonva, a kivonás eredményeként nyert matrixnak eggyel több sorában és oszlopában lesz minden elem zérus, mint ahány sorában és oszlopában $\mathbf{A}''$ csupa nulla elemet tartalmazott. Az eljárást folytatva, eljutunk egy olyan $\mathbf{A}^{(r)}$ („r vesszős" jelű) matrixhoz, amelynek már minden eleme nulla; az eljárás közben előállított diádok összege ekkor éppen az adott $\mathbf{A}$ matrix:

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*. \tag{2.5}$$

A fentebb megkezdett példát folytatva, írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{A}'' - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát jelen esetben $\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^*$, azaz részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} [1, 2, 3, 4, 5] +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [2, 1, 3, 1, 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3, 2, 1, 0, 0].$$

Megjegyzés. A diádok előtt álló $a^{-1}_{\beta_1\gamma_2}$ stb. skalártényezőket tetszőleges arányban oszthatjuk szét az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{v}_1^*$ stb. vektortényezők között.

A fentiekben vázolt diadikus felbontás úgy is értelmezhető, mint az adott $\mathbf{A}$ matrixnak két matrixtényező szorzataként való előállítása. Ugyanis az $\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*$ diádösszeg

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^* = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

alakban is írható, viszont továbbá az $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r]$ jel egy r oszlopból álló matrixot jelent, amelynek oszlopai az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ oszlopvektorok, és a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix}$$

jelkép egy r sorból álló matrixot jelent, melynek sorai a $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ sorvektorok (vö. az 1. § *a)* α)-val). *Például* a fentebb bemutatott numerikus példa esetében:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} [1, 2, 3, 4, 5] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [2, 1, 3, 1, 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3, 2, 1, 0, 0] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés. Adott matrix többféleképpen is felbontható diádok összegére. Kimutatható azonban, hogy az itt közölt eljárással az adott matrix *a lehető legkevesebb számú diád összegeként* van előállítva.

Példák

1. Bontsuk diádok összegére az alábbi matrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} [3, \quad -2, \quad -2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -6 & 4 & 4 \\ -6 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' - \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}[0,\ 1,\ -2] = \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0,\ 0,\ 1].$$

Vagyis

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}[3,\ -2,\ -2] + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}[0,\ 1,\ -2] - 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0,\ 0,\ 1].$$

2. Bontsuk diádokra az alábbi matrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}[1,\ 2,\ 5,\ 3] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} 3 & 6 & 15 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & -8 & -20 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -15 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' - \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}[0,\ -4,\ -15,\ -12] = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -15 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 13 & 14 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 4 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -\frac{165}{4} & -33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{113}{4} & -19 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[0,\ 0,\ 113,\ 76].$$

Tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3\\1\\-4\end{bmatrix}[1,\ 2,\ 5,\ 3] + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4\\0\\11\end{bmatrix}[0,\ 4,\ 15,\ 12] -$$

$$-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[0,\ 0,\ 113,\ 76] = \begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\-4 & \frac{11}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & 3\\0 & 4 & 15 & 12\\0 & 0 & 113 & 76\end{bmatrix}.$$

3. Bontsuk diádok összegére az alábbi komplex elemű matrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 2+3j & -1-2j\\2-3j & 3 & 2+j\\-1+2j & 2-j & -5\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}' - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\2-3j\\-1+2j\end{bmatrix}[2,\ 2+3j,\ -1-2j] = \begin{bmatrix}2 & 2+3j & -1-2j\\2-3j & 3 & 2+j\\-1+2j & 2-j & -5\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 4+6j & -2-4j\\4-6j & 13 & -8-j\\-2+4j & -8+j & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -\frac{7}{2} & 6+\frac{3}{2}j\\0 & 6-\frac{3}{2}j & -\frac{15}{2}\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' + \frac{2}{7}\begin{bmatrix}0\\-\frac{7}{2}\\6-\frac{3}{2}j\end{bmatrix}\left[0,\ -\frac{7}{2},\ 6+\frac{3}{2}j\right] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -\frac{7}{2} & 6+\frac{3}{2}j\\0 & 6-\frac{3}{2}j & +\frac{15}{2}\end{bmatrix} +$$

$$+\frac{2}{7}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & \frac{49}{4} & -21-\frac{21}{4}j\\0 & -21+\frac{21}{4}j & \frac{153}{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & \frac{24}{7}\end{bmatrix} = \frac{24}{7}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[0,\ 0,\ 1].$$

Tehát:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2-3j \\ -1+2j \end{bmatrix}[2,\ 2+3j,\ -1-2j] - \frac{2}{7}\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \\ 6-\frac{3}{2}j \end{bmatrix}\left[0,\ -\frac{7}{2},\ 6+\frac{3}{2}j\right] + \frac{24}{7}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0,\ 0,\ 1].$$

c) Matrix rangja és a rangszám alapján levonható következtetések

α) **Matrix rangjának fogalma és meghatározása**

A matrixelmélet egyik legfontosabb fogalomalkotása a matrix rangja. *Valamely* **A** *matrix rangja* — jelképe: $\varrho(\mathbf{A})$ — *számára két definíciót adunk, melyek egymással ekvivalensek.*

I. definíció : **A** rangja: $\varrho(\mathbf{A})$ egyenlő az

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^* = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_r]\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

alakú előállításhoz szükséges diádok *minimális* számával. Rövidség kedvéért a továbbiakban minden **A** olyan diadikus felbontását, amely a diadikus felbontáshoz szükséges legkevesebb számú diádot tartalmaz, az **A** matrix egy minimális diadikus előállításának fogjuk nevezni.

II. definíció : **A** rangja: $\varrho(\mathbf{A})$ egyenlő az **A** matrixból kiválasztható maximális rendű nem szinguláris kvadratikus minormatrixok rendszámával.

Példa. Állapítsuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrix rangját. Minthogy a fentebbi, 2. pontban foglaltak alapján az **A** matrix egy minimális diadikus előállítása:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}[1,\ 0,\ 2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}[0,\ 1,\ -3],$$

tehát az I. definíció szerint az **A** matrix rangszáma = 2. Továbbá, minthogy:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \\ 5 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

és továbbá:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

tehát a II. definíció értelmében az **A** matrix rangja ugyancsak kettőnek adódik.

A rang gyakorlati megállapítására legcélszerűbb az I. definíciót alkalmazni és a fent ismertetett diádösszegre bontási eljárást felhasználni, amely — mint fentebb is megjegyeztük — *bármely matrixot automatikusan a lehető legkisebb számú diád összegeként állít elő.*

Annak érdekében, hogy az adott matrix diádösszegre bontása után felírható

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*$$

matrixszorzat tényezői a rangszámra vonatkozó megállapítások leolvasása szempontjából áttekinthetőbb alakúak legyenek, szokás az adott matrix sorait és oszlopait az alább ismertetendő módon átrendezni.

Az adott matrix sorainak és oszlopainak átrendezése következtében ugyanis az egyes elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok legfeljebb előjelet váltanak, tehát a nem szinguláris minormatrixok az átrendezés után is nem szinguláris minormatrixok maradnak, vagyis az adott **A** *matrix sorainak és oszlopainak tetszés szerinti átrendezésével nyert* $\tilde{\mathbf{A}}$ *matrix rangja megegyezik az* **A** *matrix rangjával.*

Ha ugyanis — megtartva a 2. § *b)*-ben alkalmazott jelöléseket — a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$-edik sort az első, második, . . ., r-edik sorba helyezzük át, továbbá a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$-edik oszlopot az első, második, . . ., r-edik oszlop helyére visszük (a többi sor és oszlop elrendezése tetszőleges), akkor az ily módon nyert $\tilde{\mathbf{A}}$ matrix a következő alakra hozható:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{v}}_k^* = \sum_{k=1}^{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{kk} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{bmatrix} [0, \ 0, \ldots, 0, \ v_{kk}, \ldots, v_{km}] =$$

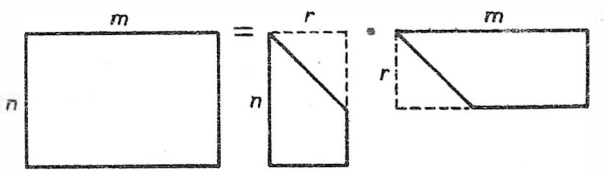
(2.8)

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{r-1,1} & u_{r-1,2} & \ldots & 0 \\ u_{r1} & u_{r2} & \ldots & u_{rr} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1,r-1} & v_{1r} & \ldots & v_{1m} \\ 0 & v_{22} & \ldots & v_{2,r-1} & v_{2r} & \ldots & v_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & v_{rr} & \ldots & v_{rm} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^*.$$

A második §-ban tárgyalt numerikus példa esetében nyilván:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az adott $\mathbf{A}$ sorainak és oszlopainak az itt ismertetett módon való átrendezésével nyert, az adott $\mathbf{A}$-val megegyező rangszámú $\tilde{\mathbf{A}}$ matrix tehát két „trapéz alakú" matrix[8] szorzatára bontható. Az adott $\mathbf{A}$, illetve az átrendezéssel nyert $\tilde{\mathbf{A}}$, továbbá az $\tilde{\mathbf{A}}$ matrix tényezői sorainak és oszlopainak számát a mellékelt ábrával szemléltethetjük:



Az $\tilde{\mathbf{U}}$ és $\tilde{\mathbf{V}}^*$ matrixtényezők szerkezetéből könnyen kiolvasható, hogy az $\tilde{\mathbf{U}}$ matrix $\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_r$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, továbbá a $\tilde{\mathbf{V}}^*$ matrix $\tilde{\mathbf{v}}_1^*, \tilde{\mathbf{v}}_2^*, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_r^*$ sorvektorai ugyancsak lineárisan függetlenek.

β) Matrix rangjára vonatkozó megjegyzések és tételek

Adott $\mathbf{A}$ matrixnak minimális számú diád összegeként való előállítása nyilván nem egyértelmű. Kimutatható azonban, hogy ha egy $\mathbf{A} = \mathbf{UV}^*$ minimális előállítás ismert, akkor abból az összes lehetséges minimális előállítások

$$\mathbf{A} = (\mathbf{UM})\,(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}^*)$$

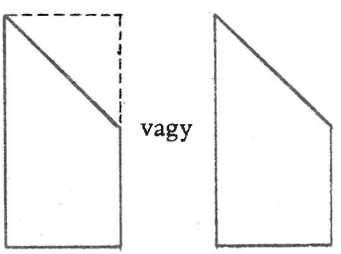
alakban adódnak, ahol $\mathbf{M}$ tetszőleges r-ed rendű nem szinguláris matrix.

A definíciók közvetlen következménye, hogy egy matrix rangja nem lehet nagyobb, mint a sorok, illetve az oszlopok száma. Kvadratikus matrix rangja tehát nem nagyobb a rendszámnál, és azzal csak akkor egyenlő, ha a matrix nem szinguláris, azaz determinánsa nullától különböző. Ez esetben a matrix (2.8) alakú előállításában háromszög-matrix tényezők szerepelnek.

Az alábbi tételek, melyek összeg és szorzat rangjára vonatkoznak, szintén a definíciók egyszerű következményei.

4. t é t e l. Összeg rangja nem nagyobb a tagok rangjainak összegénél:

$$\varrho\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leqq \varrho\,(\mathbf{A}) + \varrho\,(\mathbf{B}). \tag{2.9}$$



Ha ugyanis $\varrho\,(\mathbf{A}) = r$, $\varrho(\mathbf{B}) = s$, akkor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ diadikus előállításához *legfeljebb* $r + s$ diád szükséges. Tehát $\varrho\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leqq r + s$.

5. t é t e l. Matrix rangja szorzás által nem növekszik:

$$\varrho\,(\mathbf{AB}) \leqq \varrho\,(\mathbf{A}). \tag{2.10}$$

[8] A „trapéz alakú matrix" vagy röviden „trapézmatrix" elnevezés és a lap alján található ábrán bemutatott jelkép az egyik sarok körül csoportosuló csupa nulla elemre kíván utalni.

Legyen $\varrho(\mathbf{A}) = r$. Ekkor $\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$, tehát $\mathbf{AB} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k (\mathbf{v}_k^* \mathbf{B})$, következésképpen **AB** diadikus előállításához *legfeljebb* r diád szükséges, azaz $\varrho(\mathbf{AB}) \leqq r$.

Segédtétel. Matrix rangja nem szinguláris matrixszal való szorzás esetén nem változik.

Tegyük fel ugyanis, hogy **M** nem szinguláris, azaz $\mathbf{M}^{-1}$ létezik. Ekkor az 5. tétel szerint:

$$\varrho(\mathbf{AM}) \leqq \varrho(\mathbf{A}).$$

Minthogy továbbá nyilvánvaló, hogy $\varrho(\mathbf{A}) = \varrho\{(\mathbf{AM})\,\mathbf{M}^{-1}\}$, és mert — ugyancsak az 5. tétel szerint — $\varrho\{(\mathbf{AM})\,\mathbf{M}^{-1} \leqq \varrho(\mathbf{AM})$, tehát

$$\varrho(\mathbf{A}) \leqq \varrho(\mathbf{AM}),$$

vagyis:

$$\varrho(\mathbf{AM}) = \varrho(\mathbf{A}).$$

A matrix rangját szemléltető (2.7) diadikus előállítás felhasználásával igen egyszerűen tárgyalható a lineáris algebrának a következő két ekvivalens feladata: adott vektorok közti lineáris összefüggések megállapítása és adott homogén lineáris egyenletrendszer megoldása.

γ) Vektorok közti lineáris összefüggések megállapítása. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

Adott

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}; \quad \ldots; \quad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

n dimenziós vektorok közti lineáris összefüggések megállapítása a fentebb adott definíció (2. § *a)*-ban) szerint az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ skalárismeretleneket tartalmazó

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m = 0 \tag{2.11}$$

egyenlet, vagy részletesen kiírva, az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

skalár homogén lineáris egyenletrendszer, illetve az ezzel ekvivalens

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & 22 & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} = 0 \tag{2.13}$$

matrixegyenlet megoldásának diszkusszióját teszi szükségessé.

Eszerint m számú n dimenziós vektor közti lineáris összefüggések megállapítása m ismeretlent tartalmazó és n homogén lineáris egyenletből álló rendszer megoldásával ekvivalens feladat.

Legyen a vektorok koordinátáiból alkotott matrixnak (illetve az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott matrixnak), **A**-nak a rangja r. (Az r rang a fentiek szerint nem nagyobb, mint az **A** matrix sorainak, illetve oszlopainak a száma: $r \leqq n, m$.) Továbbá tegyük fel, hogy az egyenletek, valamint az ismeretlenek oly módon vannak elrendezve, hogy az egyenletrendszer matrixa a 2. § *b*)-ben ismertetett diádösszegre bontási eljárás segítségével a (2.8) alakra, tehát két trapéz alakú matrix szorzatára redukálható. (Ez a feltétel ugyanis legfeljebb az egyenletrendszer ismeretleneinek átszámozását, illetve az egyenletek sorrendjének megváltoztatását teszi szükségessé.)

Ekkor tehát $\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^* = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*$ (ahol $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}^*$ trapéz alakú matrixok), és ily módon a megoldandó egyenletrendszerrel ekvivalens matrixegyenlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \{\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*\} \cdot \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*\mathbf{x} + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*\mathbf{x} = \\ &= \mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1^*\mathbf{x}) + \mathbf{u}_2(\mathbf{v}_2^*\mathbf{x}) + \ldots + \mathbf{u}_r(\mathbf{v}_r^*\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ebből azonban az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ tényezők lineáris függetlensége miatt következik, hogy az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vektoroknak zárójelbe tett szorzói mind nullával egyenlők, azaz:

$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{v}_2^*\mathbf{x} = 0, \ldots, \mathbf{v}_r^*\mathbf{x} = 0. \tag{2.15}$$

Ez úgy is értelmezhető, hogy az $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{x} = 0$ egyenletben $\mathbf{U}$-val ez esetben „egyszerűsíteni" lehet, azaz $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{x} = 0$.

Az ily módon keletkező és (2.12)-vel ekvivalens egyenletrendszer $\mathbf{v}_k^*$ vektoroknak, illetve a $\mathbf{V}^*$ matrixnak az (2.8)-ból látható struktúráját (azaz a $\mathbf{V}^*$ matrix trapéz alakját) figyelembe véve, a következő alakú:

$$\begin{aligned} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \ldots + v_{1,r-1}x_{r-1} + v_{1r}x_r + \ldots + v_{1m}x_m &= 0; \quad v_{11} \neq 0 \\ v_{22}x_2 + \ldots + v_{2,r-1}x_{r-1} + v_{2r}x_r + \ldots + v_{2m}x_m &= 0; \quad v_{22} \neq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{rr}x_r + \ldots + v_{rm}x_m &= 0; \quad v_{rr} \neq 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Vizsgáljuk először az $r = m$ esetet. Ekkor a (2.16) egyenletrendszer

$$\begin{aligned} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \ldots + v_{1m}x_m &= 0; \quad v_{11} \neq 0 \\ v_{22}x_2 + \ldots + v_{2m}x_m &= 0; \quad v_{22} \neq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{mm}x_m &= 0; \quad v_{mm} \neq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

alakú, tehát csupán $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_m = 0$ triviális megoldás létezik. Ebből következik az alábbi tétel:

6. tétel. Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorok $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m]$ „koordinátamatrixá"-nak a rangja egyenlő a vektorok számával, akkor a vektorok lineárisan függetlenek.

Ugyanezen tétel másik fogalmazása:

Ha az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer együtthatóiból alkotott

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

matrix rangja egyenlő az ismeretlenek számával, akkor az egyenletrendszernek csupán a triviális megoldása létezik.

Vizsgáljuk ezekután az $r < m$ esetet. Ekkor a (2.16) egyenletrendszerben az $x_{r+1}, \ldots, x_m$ ismeretleneknek tetszés szerinti értékeket adva, a rendszer az $x_r, \ldots, x_1$ ismeretlenekre nézve nyilván rekurzív módon egyértelműen megoldható:

$$\begin{aligned} x_r &= b_{r,\,r+1}\,x_{r+1} + \ldots + b_{rm}x_m \\ x_{r-1} &= b_{r-1,\,r+1}\,x_{r+1} + \ldots + b_{r-1,\,m}\,x_m \\ x_1 &= b_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots\, b_{1,\,m}x_m \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ezek az egyenletek a (2.12) homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait mint egy $m - r$ paramétertől függő sokaságot szolgáltatják. Ennek a megoldási módszernek a gyakorlati kivitelezését, továbbá példákat illetőleg lásd a II. részben a 6. §-t.

A kapott eredmény más szóval még úgy is kifejezhető, hogy az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ egyenletnek a következő, $m - r$ számú, lineárisan független vektor tesz eleget:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_{1,\,r+1} \\ \vdots \\ b_{r,\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_{1,\,r+2} \\ \vdots \\ b_{r,\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ldots; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_{1,\,m} \\ \vdots \\ b_{r,\,m} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

A (2.18) egyenletek segítségével[9] a (2.11) egyenletből nyerhetjük, hogy:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 b_{1,r+1} + \mathbf{a}_2 b_{2,r+1} \dots + \mathbf{a}_r b_{r,r+1} = -\mathbf{a}_{r+1} \\ &\mathbf{a}_1 b_{1,r+2} + \mathbf{a}_2 b_{2,r+2} + \dots + \mathbf{a}_r b_{r,r+2} = -\mathbf{a}_{r+2} \\ &\mathbf{a}_1 b_{1,m} + \mathbf{a}_2 b_{2,m} + \dots + \mathbf{a}_r b_{r,m} = -\mathbf{a}_m; \end{aligned} \tag{2.20}$$

ezen egyenletek alapján kimondható a következő tétel:

7. tétel. Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorok koordináta-matrixának a rangja kisebb, mint a vektorok száma, akkor a vektorok közt van r számú lineárisan független, míg a többiek ezeknek homogén lineáris függvényeiként kifejezhetők. (A fentiekben feltételeztük, hogy a vektorok számozásakor éppen a lineárisan független vektorokat láttuk el az $1, 2, \dots, r$ indexekkel, tehát az adott vektorok közül $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ lineárisan függetlenek, míg $\mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \dots, \mathbf{a}_m$ ezeknek homogén lineáris függvényei.)

7.1 segédtétel. Ha a vektorok száma nagyobb a dimenziónál, azaz $m > n$ és így szükségképpen $m > r$, akkor a vektorok nem lehetnek lineárisan függetlenek. Ennek a segédtételnek szemléletes mértani tartalmat adhatunk, ha az oszlop-, illetve sorvektorokat síkbeli vagy térbeli vektorokkal azonosítjuk. Például a síkban három (vagy több) vektor közt mindig lineáris összefüggés van, vagy a háromdimenziós térben négy (vagy több) vektor közt mindig lineáris összefüggés áll fenn.

7.2 segédtétel. A most bizonyított tételekből következik, hogy ha $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$, valamint $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_r^*$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^* = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$ rangja r-rel egyenlő. Ugyanis egyrészt, miután $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*$ éppen r számú diád összege, azért $\varrho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*) \leqq r$. A lineáris függetlenség következtében viszont mind az $\mathbf{U}$, mind a $\mathbf{V}^*$ matrixnak van legalább egy zérustól különböző r-ed rendű aldeterminánsa, tehát a II. definíció értelmében (amelyet a matrix rangjára adtunk): $\varrho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) \geqq r$. Következésképpen az $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*$ matrix rangja csak r-rel egyenlő lehet.

δ) Matrixszorzat eltűnéséből a rangszám segítségével levonható következtetések

Skalárok szorzata tudvalevőleg csak akkor nulla, ha legalább egyik skalártényező nullával egyenlő. Ennek a skalártételnek közvetlen analogonja a következő matrixtétel:

8. tétel. Ha

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m,p)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(p,q)}{\mathbf{C}} = 0$$

és

$$\varrho\left(\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}\right) = m; \qquad \varrho\left(\underset{(p,q)}{\mathbf{C}}\right) = p,$$

akkor:

$$\underset{(p,q)}{\mathbf{B}} = 0.$$

Részletesebben megfogalmazva ez a tétel azt jelenti, hogy egy háromtényezős matrixszorzat eltűnéséből akkor és csak akkor következik a középső matrixtényező eltűnése, ha a szorzat első tényezőjének oszlopvektorai, harmadik tényezőjének pedig sorvektorai lineárisan függetlenek.

[9] Először $x_{r+1} = 1$; $x_{r+2} = x_{r+3} = \dots = x_m = 0$-t, azután $x_{r+2} = 1$; $x_{r+1} = x_{r+3} = \dots = x_m = 0$-t helyettesítünk be a (2.18) egyenletbe és így tovább.

Bizonyítás: Az $\mathbf{A}$ oszlop vektorainak lineáris függetlenségéből következik, hogy ez a matrix tartalmaz egy nem szinguláris $\mathbf{A}_{1,2,\ldots,m}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}$ minormatrixot, továbbá a $\mathbf{C}$ sorvektorainak lineáris függetlensége következtében ez utóbbi matrix tartalmaz egy nem szinguláris $\mathbf{C}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p}^{1,2,\ldots,p}$ minormatrixot. Ha pedig az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ szorzat zérussal egyenlő, akkor annak nyilván minden minormatrixa is zérus, tehát:

$$(\mathbf{ABC})_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} = \mathbf{A}_{1,2,\ldots,m}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \qquad \mathbf{BC}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p}^{1,2,\ldots,p} = 0.$$

Ha ezt az egyenletet balról $\left(\mathbf{A}_{1,2,\ldots,m}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\right)^{-1}$-nel, jobbról $\left(\mathbf{C}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p}^{1,2,\ldots,p}\right)^{-1}$-nel megszorozzuk, $\mathbf{B} = 0$ adódik.

Előfordulhat azonban az is, hogy egy matrixszorzat zérus anélkül, hogy a tényezők bármelyike zérusmatrix lenne, akkor azonban a tényezők rangjainak az alábbi korlátozásnak kell eleget tenniök:

9. t é t e l. Két kvadratikus matrix szorzata csak akkor lehet nulla, ha a tényezők rangjainak összege nem nagyobb a közös rendszámnál. (Két skalár szorzatára vonatkozó analóg tétel ennek speciális esete, ha a skalárt elsőrendű matrixnak, nullától különböző skalárrangját 1-nek, a zérusrangját pedig 0-nak vesszük.)

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ n-ed rendűek, továbbá legyen $\varrho(\mathbf{A}) = r$ és $\varrho(\mathbf{B}) = s$, és legyen $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$. Az $\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$ és $\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{s} \mathbf{w}_k\mathbf{z}_k^*$ minimális diadikus előállítások alkalmazásával:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_r^*\end{bmatrix}[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s]\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1^*\\ \vdots\\ \mathbf{z}_s^*\end{bmatrix} =$$

$$[\mathbf{u}_1 \ldots, \mathbf{u}_r]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\mathbf{w}_1 & \ldots & \mathbf{v}_1^*\mathbf{w}_s\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathbf{v}_r^*\mathbf{w}_1 & \ldots & \mathbf{v}_r^*\mathbf{w}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1^*\\ \vdots\\ \mathbf{z}_s^*\end{bmatrix} = 0.$$

Minthogy az első és az utolsó tényező „maximális rangúak", azaz a rangszám megegyezik a rendszámmal, vagyis mind az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ oszlopvektorok, mind a $\mathbf{z}_1^*, \ldots, \mathbf{z}_s^*$ sorvektorok lineárisan függetlenek, ezért a 8. tétel értelmében szükséges, hogy a középső tényező nulla legyen, azaz valamennyi $\mathbf{v}_i^*\mathbf{w}_j$ skalárszorzat értéke nullával legyen egyenlő. Ezt a követelményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az x_i és y_j változóknak minden értékénél fenn kell állania a következő identitásnak:

$$(\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r)^*(\mathbf{w}_1y_1 + \ldots + \mathbf{w}_sy_s) \equiv 0.$$

Ha most már feltesszük, hogy $r + s > n$, vagyis a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ sorozatban levő vektorok száma nagyobb, mint n, akkor eszerint ezeknek a vektoroknak a száma nagyobb, mint a vektorok dimenziójának száma, tehát a 7.1. segédtétel értelmében a vektorok közt lineáris összefüggés áll fenn, azaz — *valós elemű* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ vektorok esetén — a

$$\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r + \mathbf{w}_1y_1 + \ldots + \mathbf{w}_sy_s = 0$$

homogén lineáris egyenletnek, azaz a

$$\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r = -(\mathbf{w}_1y_1 + \ldots + \mathbf{w}_sy_s)$$

egyenletnek van nemtriviális megoldása, melyben legalább egyik x_i és egyik y_j nem nulla. Ez a nemtriviális megoldás azonban olyan $\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r$ vektort határoz meg, amely nem nulla és mégis kielégíti a

$$(\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r)^* \, (\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r) = 0$$

egyenletet, ami nyilvánvalóan ellentmondás, tehát az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ oszlopvektorok, illetve a $\mathbf{z}_1^*, \ldots, \mathbf{z}_s^*$ sorvektorok lineáris függetlensége és az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ szorzat zérus volta esetén (ha mind $\mathbf{A}$, mind $\mathbf{B}$ n-ed rendű kvadratikus matrixok) $r + s$ nem lehet nagyobb, mint n.

Komplex elemű vektorok esetén abból a feltevésből, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \ldots \mathbf{w}_s$ sorozatban levő vektorok száma a vektorok dimenziójánál nagyobb, a 7.1. segédtétel figyelembevételével arra is következtethetünk, hogy a

$$\bar{\mathbf{v}}_1\bar{x}_1 + \ldots + \bar{\mathbf{v}}_r\bar{x}_r + \mathbf{w}_1y_1 + \ldots + \mathbf{w}_sy_s = 0$$

homogén lineáris egyenletnek, azaz a

$$\bar{\mathbf{v}}_1\bar{x}_1 + \ldots + \bar{\mathbf{v}}_r\bar{x}_r = -(\mathbf{w}_1y_1 + \ldots + \mathbf{w}_sy_s)$$

egyenletnek van nemtriviális megoldása, melyben legalább egyik $\bar{x}_i = 0$ és egyik $y_j = 0$ (Természetesen komplex elemű $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ vektorok esetén is lehet az $r + s > n$ feltevésből a $\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r + \mathbf{w}_1y_1 + \ldots \mathbf{w}_sy_s = 0$ egyenlet nem triviális megoldásának létezésére következtetni, azonban a bizonyítás végső következtetéséhez most a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ vektorok és az $x_1, \ldots, x_r$ skalárszorzók konjugáltjaira van szükség.) Ez a nemtriviális megoldás azonban olyan komplex elemű vektort határoz meg, amelynek abszolút értéke (azaz a vektor és konjugáltja skalárszorzata) zérus:

$$(\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r)^* \, (\bar{\mathbf{v}}_1\bar{x}_1 + \ldots + \bar{\mathbf{v}}_r\bar{x}_r) = 0$$

anélkül, hogy a $\mathbf{v}_1x_1 + \ldots + \mathbf{v}_rx_r$ vektor mindegyik komponense nulla volna, ami nyilván abszurdum. Tehát a tételt ily módon komplex elemű $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ vektorok esetére is igazoltuk.

ε) Projektormatrix diadikus felbontása

A diadikus felbontás által nyújtott további lehetőségeket először az ún. projektormatrixok esetében fogjuk megvizsgálni. Miként már korábban is megemlítettük, projektormatrixnak (vagy idempotens-matrixnak) nevezünk minden olyan kvadratikus $\mathbf{P}$ matrixot, mely a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenletnek tesz eleget. Ezen projektormatrixokra jellemző a következő tétel:

10. t é t e l. Ha egy r-ed rangú projektormatrixot előállítottunk lineárisan független diádok összegeként, $\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$ alakban, akkor az itt szereplő $\mathbf{u}_k$, illetve $\mathbf{v}_k^*$ vektorok automatikusan kielégítik a

$$\mathbf{v}_k^*\mathbf{u}_l = \delta_{kl}; \quad \begin{cases} \delta_{kl} = 0, & \text{ha } k \neq l, \\ \delta_{kk} = 1, \end{cases} \tag{2.21}$$

relációkat, azaz az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ és $\mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ rendszerek „biortogonálisak".

A „biortogonális" jelző két vektorrendszer, éspedig az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ és $\mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ esetén arra utal, hogy — a háromméretű tér vektoraival ábrázolt háromdimenziós oszlop-, illetve sorvektorok esetén — az egyik vektorrendszer bármely vektora merőleges a másik vektorrendszer valamennyi, tőle különböző indexű vektorára, és az egyező indexű vektorok skalárszorzata eggyel egyenlő.

Bizonyítás: A $\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$ diadikus előállítás felhasználásával a $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = 0$ a következő alakban írható:

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} - [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = 0$$

azaz:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2r} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nr} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r] - \underset{(r,r)}{\mathbf{E}} \right\} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ v_{r1} & v_{r2} & \ldots & v_{rn} \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{U} [\mathbf{v}_k^* \mathbf{u}_l - \delta_{kl}] \mathbf{V}^* = 0.$$

Az $\mathbf{u}_k$ és $\mathbf{v}_k^*$ vektorok lineáris függetlenségéből következik, hogy az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}^*$ matrixok r-ed rangúak, tehát a 8. tétel alapján a fenti háromtényezős szorzat középső matrixtényezője eltűnik, azaz

$$[\mathbf{v}_k^* \mathbf{u}_l - \delta_{kl}] = 0.$$

A most kimutatott tétel elméleti és gyakorlati jelentősége abban a felismerésben van, hogy egy *projektormatrixot nem is lehet másképpen diádok összegére bontani, mint úgy, hogy a diádok vektortényezői biortogonálisak.*

Például a

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

matrix projektor, mert kielégíti a $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = 0$ egyenletet. Ennek megfelelően a diadikus felbontással nyert

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 15/2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1^* = [3, 2, 13/4], \quad \mathbf{v}_2^* = [1, 0, 9/4]$$

vektorok valóban biortogonális rendszert alkotnak.

A projektormatrix definíciójából következik továbbá, hogy annak bármely oszlop- (illetve sor-) vektora változatlan marad, ha azt balról (illetve jobbról) a projektormatrixszal megszorozzuk. Ha ugyanis a projektormatrix oszlopvektorokkal kifejezett alakja

$$\mathbf{P} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n],$$

akkor $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P}$-ből következik, hogy

$$\mathbf{P} \cdot [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] = [\mathbf{P}\mathbf{a}_1, \mathbf{P}\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{P}\mathbf{a}_n] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n],$$

tehát:

$$\mathbf{P}\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i.$$

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy:

$$\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{P} = \mathbf{a}^j.$$

ζ) Hermitikus (illetve valós szimmetrikus) projektormatrixok diadikus felbontása

Egy $\mathbf{P}$ projektormatrix hermitikus, ha egyidejűleg kielégíti a $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}^*$ és $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenleteket; és egy $\mathbf{uv}^*$ diád hermitikus, ha $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$. Továbbá: egy $\mathbf{P}$ projektormatrix valós szimmetrikus, ha minden eleme valós, és ha egyidejűleg kielégíti a $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ és $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenleteket; és egy $\mathbf{uv}^*$ diád valós szimmetrikus, ha minden eleme valós, és ha $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Legyen $\mathbf{P} = [a_{kl}]$, ahol $a_{kl} = \bar{a}_{lk}$, ekkor

$$\mathbf{P}^2 = \sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} a_{\nu l},$$

tehát a főátlóbeli elemek összege $\mathbf{P}$-ben $\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ és $\mathbf{P}^2$-ben $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} a_{\nu k} \right)$.

Ebből a $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ reláció folytán a

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} a_{\nu k} \right) = \sum_{k=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} |a_{k\nu}|^2$$

egyenlet adódik, melyből $\mathbf{P} \neq 0$ esetén következik, hogy az a_{kk} főátlóbeli elemek közt (amelyek szükségképpen mind valósak) van legalább egy pozitív. Legyen ez pl. a_{11}, akkor az

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}; \qquad \bar{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}]$$

vektorokból képzett $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^*$ diád hermitikus. Továbbá $\mathbf{P} - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^*$ szintén hermitikus projektor, ugyanis:

$$\{\mathbf{P} - \mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{u}}_1^*\}^2 = \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}\mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{u}}_1^* - \mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{u}}_1^* \mathbf{P} + \mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{u}}_1^* \mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{u}}_1^* = \mathbf{P} - \mathbf{u}_1 \bar{\mathbf{u}}_1^*,$$

mert

$$\bar{\mathbf{u}}_1^* \mathbf{u}_1 = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu} a_{\nu 1}}{a_{11}} = 1.$$

Ebből következik, hogy $\varrho(\mathbf{P}) > 1$ esetén az $\mathbf{A} - \mathbf{u}_1\bar{\mathbf{u}}_1^*$ projektormatrixból a fenti eljárással egy további hermitikus diád választható le. Ha $\varrho(\mathbf{P}) = r$, akkor r számú lépés után ily módon végül is a zérusmatrixhoz jutunk. A levezetett eredményt az alábbi tételbe foglaljuk:

11. t é t e l. Bármely hermitikus projektor előállítható

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}_1\bar{\mathbf{u}}_1^* + \mathbf{u}_2\bar{\mathbf{u}}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\bar{\mathbf{u}}_r^*$$

alakban, és az itt szereplő vektorok „uniter-ortogonális" rendszert alkotnak, azaz kielégítik az

$$\mathbf{u}_k^*\mathbf{u}_l = \delta_{kl}; \qquad \begin{cases} \delta_{kl} = 0, & \text{ha } k \neq l \\ \delta_{kk} = 1. \end{cases} \tag{2.22}$$

relációkat.

Egy vektorrendszert (jelen esetben az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ vektorrendszert) eszerint akkor nevezünk „uniter-ortogonális"-nak, ha mindegyik vektornak az abszolút értéke egy, és bármelyik vektornak egy tőle különböző indexű vektor konjugáltjával való skalárszorzata nulla.

A 11. tételből következik, hogy bármely valós hermitikus, azaz valós elemű szimmetrikus projektormatrix [$\varrho(\mathbf{P}) = r$ esetén] előállítható

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{u}_r^*$$

alakban, ahol az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vektorok (a hermitikus projektor felbontásában szereplő uniter-ortogonális rendszer speciális esetenként) úgynevezett „ortogonális és normált" vektorrendszert alkotnak, azaz olyan rendszert, amelynek mindegyik vektora egységnyi abszolút értékű, és bármelyik vektornak egy tőle különböző indexű vektorral való skalárszorzata nulla; tehát

$$\mathbf{u}_k^* \cdot \mathbf{u}_l \cdot \delta_{kl}. \tag{2.23}$$

P é l d á u l az 1. § *b) ϑ)* alatt bemutatott

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

projektor diadikus felbontása során azt nyerjük, hogy:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right] + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

tehát ez esetben: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$; nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2^* \cdot \mathbf{u}_2 = 1 \text{ és } \mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^* \cdot \mathbf{u}_1 = 0.$$

η) Általános kvadratikus matrix diadikus felbontása

A fentebbi ε)-ban és ζ)-ban azt láttuk, hogy ha egy projektormatrixot diádok összegére bontunk fel, akkor a felbontásban szereplő diádok vektorteny ezői automatikusan „biortogonalizálva" vannak. Valamely általános (azaz nem projektor) kvadratikus matrix diadikus előállításával kapcsolatosan mármost a matrixelmélet egyik alapvető problémája a következő alakban vethető fel: Létezik-e adott **A** kvadratikus matrixnak olyan

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^* + \ldots + \lambda_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^* \tag{2.24}$$

alakú előállítása, melynél $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ skaláregyütthatókat jelent, és az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_r$ és $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ vektorok biortogonális rendszert alkotnak, melynél tehát teljesülnek a

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{v}_l = \delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.25}$$

relációk?

A feltett kérdésre fokozatosan, az elmélet további kiépítésével fogunk végleges választ nyerni, azonban már e helyen megállapíthatjuk, hogy a (2.25) feltevésnek eleget tevő (2.24) alakú, tehát biortogonális diádokkal való előállítás létezése esetén milyen jelentőségük van az abban szereplő λ_k skalárteny ezőknek és az $\mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_k$ vektorteny ezőknek.

Ha az

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^* + \ldots + \lambda_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^*$$

egyenlet mindkét oldalán $\mathbf{u}_k$-val jobbról szorzunk, és a (2.25) biortogonalitási relációkat figyelembe vesszük, azt nyerjük, hogy:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.26}$$

Hasonlóképpen $\mathbf{v}_k^*$-gal balról szorozva, adódik, hogy:

$$\mathbf{v}_k^* \cdot \mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{v}_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.27}$$

A (2.26) és (2.27) egyenletek az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ oszlopvektoroknak, illetve a $\mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ sorvektoroknak azt a jellemző sajátságát fejezik ki, hogy ezek a vektorok az **A** matrixszal való szorzás esetén azt a változást szenvedik, hogy az illető sor- vagy oszlopvektor mindegyik eleme ugyanazon — tehát a vektor elé is kiemelhető — számmal szorzódik, vagyis az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, illetve $\mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ vektorok bármelyikének az **A** matrixszal

való szorzása egy λ_k skalárral való szorzással egyenértékű. Ezt a jellemző sajátságot a háromméretű tér vektorai köréből vett geometriai szólásmóddal úgy is szokás kifejezni, hogy az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ illetve $\mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ vektorok az **A** matrixszal való szorzás által csupán egy λ_k arányú „nyújtás"-t szenvednek (pozitív λ_k-nál irányukat megtartva, negatív λ_k-nál ellentett irányúra változva). Ezen szoros kapcsolat hangsúlyozása céljából az $\mathbf{u}_k$, illetve $\mathbf{v}_k^*$ vektorokat az **A** matrix jobb oldali, illetve bal oldali *„sajátvektorai"-nak*, a λ_k skalár „nyújtási arányokat" pedig *„sajátérték"*-eknek nevezzük.

12. t é t e l. Ha egy kvadratikus matrixot előállítottunk mint biortogonális diádok lineáris formáját, akkor a diádok vektortényezői a matrixnak jobb, illetve bal oldali sajátvektorai, a diádok skaláregyütthatói pedig a matrix sajátértékei.

A sajátvektoroknak és sajátértékeknek a matrixok úgyszólván valamennyi alkalmazási területén kitüntetett szerepük van.

A geometriában a másodrendű görbék és felületek (másodrendű vagy kvadratikus alakzatok) ún. „főtengely-transzformációjánál" a sajátvektorok, illetve sajátértékek adják a főtengelyek irányát, illetve hosszúságát.

A mechanikában az ún. „normálkoordináták" bevezetéséhez ugyancsak a sajátvektorok ismerete szükséges.

A szilárdságtanban valamely alakváltozást szenvedő közeg fő nyúlási irányait és arányait az ún. „alakváltozási matrix" sajátvektorai és sajátértékei adják.

P é l d a

α | Meghatározandó az alábbi matrix rangja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 6 & -9 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ -12 & 7 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} [3, \ 1, \ 4, \ -5] = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 6 & -9 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ -12 & 7 & -2 & 7 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 21 & 7 & 28 & -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -33 & 0 & -30 & 42 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} [11, \ 0, \ 10, \ -14].$$

Mivel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} [3, \ 1, \ 4, \ -5] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} [11, \ 0, \ 10, \ -14],$$

ezért

$$\varrho(\mathbf{A}) = 2.$$

3. §. KARAKTERISZTIKUS POLINOM. MINIMÁL POLINOM. FOKSZÁM-REDUKCIÓ

a) Karakterisztikus és minimál polinom és egyenlet

α) **Karakterisztikus polinom és karakterisztikus egyenlet**

Az előző fejezetben megismertünk egyes matrixtípusokat, melyek egyszerű algebrai egyenletnek tesznek eleget. Így bármely $\mathbf{P}$ projektor kielégíti a $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = 0$ és bármely $\mathbf{T}$ tükröző matrix kielégíti a $\mathbf{T}^2 - \mathbf{E} = 0$ egyenletet.

Közelfekvő ezek után a következő kérdés: Található-e egy tetszőleges kvadratikus $\mathbf{A}$ matrixhoz egy

$$c_0\mathbf{A}^m + c_1\mathbf{A}^{m-1} + \ldots + c_{m-1}\mathbf{A} + c_m\mathbf{E} = 0 \tag{3.1}$$

alakú skalár együtthatós algebrai egyenlet, amelyet ez a matrix kielégít?

Erre a kérdésre ad választ a következő tétel:

13. t é t e l. (Hamilton—Cayley-tétel): Bármely n-ed rendű kvadratikus $\mathbf{A}$ matrix kielégíti a hozzátartozó

$$D(\lambda) \equiv |\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| \equiv \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \tag{3.2}$$

$$\equiv \lambda^n - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ji} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \lambda^{n-2} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \lambda^{n-3} + \ldots \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

úgynevezett „karakterisztikus egyenletet", azaz

$$D(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}^n - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \mathbf{E} = 0. \tag{3.3}$$

Az itt bevezetett $\{\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\}$ matrixot *„karakterisztikus matrix"*-nak, a karakterisztikus matrix $D(\lambda) \equiv |\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}|$ determinánsát pedig *„karakterisztikus determináns"*-nak nevezzük, a karakterisztikus egyenlet bal oldalán álló, λ-ban n-ed fokú polinomot pedig *„karakterisztikus polinom"*-nak mondjuk. Minthogy a karakterisztikus polinom nyilvánvalóan nem egyéb, mint a karakterisztikus determinánsnak az 1. § *c) β)* IV°-ban bemutatott módon átrendezett alakja, tehát a karakterisztikus polinomot is $D(\lambda)$-val jelölhetjük.

P é l d á u l, ha $\mathbf{A}$ másodrendű kvadratikus matrix, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

akkor

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

tehát:

$$D(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}^2 - (a_{11} + a_{22})\mathbf{A} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,\mathbf{E}.$$

Azonban

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix},$$

tehát a $D(\mathbf{A})$ matrixpolinomba az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^2$ matrixokat behelyettesítve, azt nyerjük, hogy

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{22})a_{11} & (a_{11} + a_{22})a_{12} \\ (a_{11} + a_{22})a_{21} & (a_{11} + a_{22})a_{22} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} = 0,$$

ezzel a Hamilton—Cayley-tételt másodrendű matrixokra igazoltuk.

Általános esetben a matrixalgebra ezen alapvető tételének a bizonyítása legegyszerűbben arra a tényre alapítható, hogy az $\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A} = 0$ matrixegyenlet a $\lambda = \mathbf{A}$ helyettesítéssel triviális módon kielégíthető. Ugyanis az adjungált matrixnak az (1.26) és (1.27) egyenletekben foglalt tulajdonsága szerint azonosan érvényes a következő egyenlet:

$$(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \equiv \{\operatorname{adj}(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})\} \cdot (\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \equiv \mathbf{E}\,|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| \equiv \mathbf{E} \cdot D(\lambda);$$

például másodrendű matrix esetében:

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{11} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \{\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\}.$$

Ez a λ skalárra vonatkozó azonosság általában nem marad érvényben, ha λ helyébe egy tetszőleges matrixot helyettesítünk, mert az azonosság levezetésében λ-nak *bármely* tényezővel való felcserélhetősége implicite fel volt tételezve. Azonban az adj $(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})$ matrix elemei nem egyebek, mint az $(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})$ matrixnak $(n-1)$-ed rendű előjeles aldeterminánsai, tehát az adjungált elemei λ-nak legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomjai. Ha tehát az adjungált elemeit λ-nak fogyó hatványai szerint rendezzük, akkor az adjungált matrix felírható a következő alakban:

$$\text{adj}\,(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) = \mathbf{C}_0\lambda^{n-1} + \mathbf{C}_1\lambda^{n-2} + \ldots + \mathbf{C}_{n-2}\lambda + \mathbf{C}_{n-1}.$$

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

másodrendű kvadratikus matrix esetében:

$$\text{adj}\,(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{bmatrix}.$$

Innen mármost az $(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})$ és az adj $(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})$ felcserélhetősége folytán következik, hogy az $\mathbf{A}$ matrix a $\mathbf{C}_0\lambda^{n-1} + \mathbf{C}_1\lambda^{n-2} + \ldots + \mathbf{C}_{n-2}\lambda + \mathbf{C}_{n-1}$ polinom minden egyes matrixegyüttható jával felcserélhető, és ily módon az $(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \times$ $\times \text{adj}\,(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) = \mathbf{E} \cdot D(\lambda)$ azonosság akkor is érvényben marad, ha a λ skalár helyébe az $\mathbf{A}$ matrixot helyettesítjük.

Tehát

$$\mathbf{E} \cdot D(\mathbf{A}) \equiv (\mathbf{E}\mathbf{A} - \mathbf{A}) \cdot \text{adj}\,(\mathbf{E}\mathbf{A} - \mathbf{A}) = 0,$$

tehát mivel $\mathbf{E} \neq 0$, szükségképpen $D(\mathbf{A}) = 0$.

β) Minimál polinom és minimál egyenlet

Miként (3.2)-ből látható, az $|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| = 0$ karakterisztikus egyenlet fokszáma megegyezik az $\mathbf{A}$ matrix rendszámával, λ^k együtthatója pedig (lásd az 1. § *c) β)* IV°-t is) az $|\mathbf{A}|$ determináns $(n-k)$-ad rendű főminorainak összegével egyenlő.

Például, ha a $\mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* = [u_i v_j]$ diád tényezői kielégítik az $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = 1$ relációt, akkor a hozzátartozó karakterisztikus egyenlet:

$$|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{P}| \equiv \begin{vmatrix} \lambda - u_1v_1 & -u_1v_2 & \ldots & -u_1v_n \\ -u_2v_1 & \lambda - u_2v_2 & \ldots & -u_2v_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -u_nv_1 & -u_nv_2 & \ldots & \lambda - u_nv_n \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \equiv \lambda^n - \lambda^{n-1} = 0. \tag{3.4}$$

A karakterisztikus egyenletben a λ-nak $(n-1)$-nél alacsonyabb fokú hatványai azért hiányoznak, mert az ezen példában szereplő matrix egyetlen diád, tehát rangja egy, következésképpen a másod- és magasabb rendű minorok eltűnnek.

Tehát a Cayley—Hamilton-tétel szerint $\mathbf{P}$ kielégíti a $\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^{n-1}$ egyenletet. Továbbá könnyen igazolható, hogy $\mathbf{P}$ projektor, tehát egyidejűleg kielégíti a projektorokra jellemző $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = 0$ egyenletet is. Ugyanis a $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} = 1$ feltétel figyelembevétele mellett nyilvánvaló, hogy $\mathbf{P}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{P}$. Tehát a $\mathbf{P}$ matrix egyidejűleg kielégíti a rendszámával megegyező fokszámú karakterisztikus egyenletet és ($n > 2$ esetén) a *rendszámnál kisebb fokszámú* $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = 0$ egyenletet. Ez a példa tehát azt mutatja, hogy vannak matrixok, melyek a rendszámuknál alacsonyabb fokú algebrai egyenletet is kielégítenek, és ezzel a következő probléma felvetésére vezet:

Hogyan határozható meg az a *legalacsonyabb fokú* algebrai egyenlet („minimál egyenlet"), amelyet egy adott $\mathbf{A}$ matrix kielégít?

A megoldás kiindulópontja ez esetben is a — fentebb is felhasznált — alapvető fontosságú

$$(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \equiv \mathbf{E} \cdot D(\lambda) \tag{3.5}$$

identitás. Vizsgáljuk, lehet-e ezen identitás két oldalán álló matrixokat λ-nak valamely skalárpolinomjával osztani. Miután egy matrixnak skalárral való osztása ekvivalens a matrix valamennyi elemének az osztásával, nyilvánvaló, hogy a bal oldali első tényező:

$$\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

a λ-nak semmilyen (valódi) polinomjával nem osztható, tehát oszthatóság szempontjából a bal oldalon csupán a másik tényező, azaz az

$$\operatorname{adj}(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \equiv \begin{bmatrix} D_{11}(\lambda) & D_{12}(\lambda) & \dots & D_{1n}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) & D_{22}(\lambda) & \dots & D_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ D_{n1}(\lambda) & D_{n2}(\lambda) & \dots & D_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

matrix jöhet tekintetbe, ahol $D_{ij}(\lambda)$ az $(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})$ matrix „$(j \cdot i)$-edik" eleméhez (azaz a j-edik sorban és az i-edik oszlopban levő elemhez) tartozó $(n-1)$-ed rendű előjeles aldeterminánsa; tehát — a determinánst kifejtve — λ-nak legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomja. Ezeknek a $D_{11}(\lambda), D_{12}(\lambda), D_{22}(\lambda), \dots, D_{nn}(\lambda)$ polinomoknak *estleg* vannak nem konstans közös osztóik, melyek közül a legnagyobb (azaz: legmagasabb fokszámú) közös osztót $\Theta(\lambda)$-val jelöljük. A jobb oldalon álló $D(\lambda)$ determináns a kifejtési tétel szerint a saját $(n-1)$-ed rendű aldeterminánsainak, vagyis a $D_{11}(\lambda), \dots, D_{nn}(\lambda)$ determinánsoknak elsőfokú kifejezéseként is előállítható, tehát nyilván osztható a $D_{11}(\lambda), \dots, D_{nn}(\lambda)$ determinánsok legnagyobb közös osztójával, $\Theta(\lambda)$-val. Minthogy továbbá $\Theta(\lambda) \neq 0$, tehát a (3.5) identitás mindkét oldalát oszthatjuk $\Theta(\lambda)$-val, és így a következő azonosságra jutunk:

$$(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})}{\Theta(\lambda)} \equiv \mathbf{E} \frac{D(\lambda)}{\Theta(\lambda)} \equiv \mathbf{E}\, \Delta(\lambda). \tag{3.6}$$

Ha a most így nyert identitásban a fenti meggondolások alapján λ helyébe az $\mathbf{A}$ matrixot helyettesítjük, azt nyerjük, hogy $\Delta(\mathbf{A}) = 0$. *Kimutatható, hogy a* $\Delta(\lambda) = 0$ *egyenlet — melynek bal oldala* $D(\lambda)$*-nak és a* $D_{11}(\lambda), \ldots, D_{nn}(\lambda)$ *aldeterminánsok legnagyobb közös osztójának hányadosa, a legalacsonyabb fokú algebrai egyenlet, melyet az* $\mathbf{A}$ *matrix kielégít.* Ezen oknál fogva a $\Delta(\lambda)$ polinomot az $\mathbf{A}$ matrix *„minimál polinom"*-jának, a $\Delta(\lambda) = 0$ egyenletet pedig a matrix *„minimál egyenleté"*-nek nevezzük.

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrix karakterisztikus polinomja:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| \equiv \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \equiv (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1).$$

Minthogy

$$\operatorname{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \equiv \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \lambda^2-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix},$$

tehát:

$$\Theta(\lambda) \equiv \lambda - 1,$$

és így:

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^2 - 1.$$

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrix valóban kielégíti a $\lambda^2 - 1 = 0$ minimál egyenletet. Ugyanis

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és így:

$$\Delta(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} = 0.$$

Példák

α) 1. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

A karakterisztikus egyenlet:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0.$$

Kiszámítjuk $\mathbf{A}^2$-et:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenletbe λ helyébe $\mathbf{A}$-t írunk, és az abszolút tagot $\mathbf{E}$-vel szorozzuk:

$$\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

A karakterisztikus egyenlet:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 & -5 \\ -4 & \lambda & -7 \\ -1 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 7) - 3(-4\lambda + 16 - 7) -$$

$$- 5(-4 + \lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 22\lambda - 21 = 0.$$

Igazolandó tehát, hogy

$$\mathbf{A}^3 - 6\mathbf{A}^2 + 22\mathbf{A} - 21\mathbf{E} = 0.$$

$\mathbf{A}$ hatványai:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -11 & 9 \\ 15 & -19 & 48 \\ 2 & -7 & 14 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -11 & 9 \\ 15 & -19 & 48 \\ 2 & -7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41 & 0 & -56 \\ 2 & -93 & 134 \\ -10 & -20 & 17 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^3 - 6\mathbf{A}^2 + 22\mathbf{A} - 21\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -41 & 0 & -56 \\ 2 & -93 & 134 \\ -10 & -20 & 17 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} -3 & -11 & 9 \\ 15 & -19 & 48 \\ 2 & -7 & 14 \end{bmatrix} +$$

$$+ 22 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 21 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

β | Igazoljuk, hogy az alábbi **A** matrix karakterisztikus egyenlete nem minimál egyenlet, majd mutassuk meg, hogy **A** kielégíti minimál egyenletét.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-9 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda-9 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda - 9)\{(\lambda - 9)^2 - 25\} +$$

$$+ 5\{-5(\lambda - 9) - 25\} - 5\{25 + 5(\lambda - 9)\} = (\lambda - 9)^3 - 75(\lambda - 9) - 250 = 0.$$

Ha $\lambda - 9 = x$ helyettesítéssel élünk, akkor a megoldandó egyenlet:

$$x^3 - 75x - 250 = 0.$$

Ennek egyik gyöke: $x_1 = 10$. $(x - 10)$ gyöktényezővel osztva:

$$x^3 - 75x - 250 = (x^2 + 10x + 25)(x - 10) = 0;$$

és így látható, hogy a másik gyök: $x_{2,3} = -5$ kétszeres.

A karakterisztikus egyenlet gyökei tehát:

$$\lambda_1 = 19 \quad \text{és} \quad \lambda_{2,3} = 4.$$

Annak eldöntésére, hogy van-e a karakterisztikus egyenletnél alacsonyabb fokú minimál egyenlet, ki kell számítanunk

adj $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|$-t:

$$\operatorname{adj}|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} (\lambda - 9)^2 - 25 & 5(\lambda - 9) + 25 & 25 + 5(\lambda - 9) \\ 5(\lambda - 9) + 25 & (\lambda - 9)^2 - 25 & 5(\lambda - 9) + 25 \\ 25 + 5(\lambda - 9) & 5(\lambda - 9) + 25 & (\lambda - 9)^2 - 25 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda-14 & 5 & 5 \\ 5 & \lambda-14 & 5 \\ 5 & 5 & \lambda-14 \end{vmatrix}.$$

Mivel adj $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|$-ból $(\lambda - 4)$ tényező kiemelhető, ezért van minimál polinom. (Emlékeztetünk arra, hogy a $\lambda = 4$ gyöknek az $x = -5$, tehát a kétszeres gyök felelt meg.)

$$\frac{(x^2 + 10x + 25)(x - 10)}{x + 5} = (x + 5)(x - 10) = (\lambda - 9 + 5)(\lambda - 9 - 10) =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 19) = \lambda^2 - 23\lambda + 76.$$

Ezután igazoljuk, hogy **A** kielégíti az

$$\mathbf{A}^2 + 23\mathbf{A} + 76\mathbf{E} = 0$$

egyenletet:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131 & 115 & 115 \\ 115 & 131 & 115 \\ 115 & 115 & 131 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^2 - 23\mathbf{A} + 76\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 131 & 115 & 115 \\ 115 & 131 & 115 \\ 115 & 115 & 131 \end{bmatrix} - 23 \begin{bmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix} +$$

$$+ 76 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) A fokszám-redukció

α) A karakterisztikus polinom és a minimál polinom fokszámai közti különbség („fokszám-redukció") megállapítása

A $D(\lambda)$ és $\Delta(\lambda)$ polinomok fokszámainak különbségére (amely különbséget „fokszám-redukció"-nak szokás nevezni) nézve *felső korlát* állapítható meg a következő módon: Legyen a $D(\lambda)$ polinom prímtényezős alakja:

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s}, \tag{3.7}$$

ahol az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ számok a karakterisztikus polinom $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ gyökének a multiplicitását jelentik, tehát $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = n$. Ebben az esetben a $\Theta(\lambda)$ polinom (minthogy $\Theta(\lambda)$ a $D(\lambda)$ osztója) gyöktényezős alakban írva szükségképpen a következő módon állítható elő:

$$\Theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\beta_1} (\lambda - \lambda_2)^{\beta_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\beta_s}; \quad \beta_k \leqq \alpha_k. \tag{3.8}$$

Minthogy $\Theta(\lambda)$ a $D_{11}(\lambda), \dots, D_{nn}(\lambda)$ aldeterminánsok bármely

$$\left(\text{általában } \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} D_{jk}(\lambda) \text{ alakban írható}\right)$$

homogén lineáris kifejezésének is osztója, szükségképpen a $D(\lambda)$ determináns deriváltja, $D'(\lambda)$ is osztható $\Theta(\lambda)$-val, mert (lásd az (1.21) azonosságot) $D'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} D_{kk}(\lambda)$. Viszont ebből következik, hogy a $\Theta(\lambda)$ polinom gyöktényezős alakja a $(\lambda - \lambda_k)$ gyöktényezőt nem tartalmazhatja $\alpha_k - 1$-nél magasabb hatványon.

Ebből a megállapításból következik, hogy *ha a* $D(\lambda) = 0$ *karakterisztikus egyenlet csupa egyszeres zérushellyel bír*, vagyis mindegyik α_k eggyel egyenlő, *akkor „fokszám-redukció" nincs*, vagyis akkor a karakterisztikus polinom egyszersmind minimál polinom is: $\Delta(\lambda) = D(\lambda)$.

Ha viszont a karakterisztikus polinom zérushelyei többszörös zérushelyek, akkor a maximális „fokszám-redukció" akkor áll be, amidőn (konstans faktortól eltekintve):

$$\Theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s - 1}, \tag{3.9}$$

azaz amidőn $\Theta(\lambda)$ éppen a $D(\lambda)$ és $D'(\lambda)$ polinomok legnagyobb közös osztója: $\Theta(\lambda) = (D(\lambda), D'(\lambda))$. Ebben az esetben:

$$\Delta(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\Theta(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s), \tag{3.10}$$

tehát *maximális fokszám-redukció esetén a minimál egyenlet a karakterisztikus egyenlet valamennyi gyökét egyszeres multiplicitással tartalmazza.*

Mint látni fogjuk, azok a matrixok, melyeknek minimál egyenlete csupa egyszeres gyökkel bír, a matrixoknak egy fontos alosztályát alkotják, mely az alkalmazásokban előforduló matrixoknak túlnyomó többségét felöleli, és amelyeknek az elmélete elemi eszközökkel felépíthető. Jelen könyvben kizárólag ilyen matrixokkal foglalkozunk.

β) Hermitikus (illetve valós szimmetrikus) matrix minimál egyenlete csupa egyszeres gyökkel bír

A fentiek alapján önként felmerül a kérdés, hogy vannak-e olyan matrixok, amelyek külső struktúrájából (vagyis a $\Theta(\lambda)$ legnagyobb közös osztó direkt kiszámítása nélkül) megállapítható, hogy minimál egyenletük csupa egyszeres gyökkel bír? Az alábbiakban ki fogjuk mutatni, hogy egy hermitikus (illetőleg ennek speciális eseteként egy valós szimmetrikus) matrix mindig ilyen tulajdonságú.

A bizonyításhoz két segédtétel előrebocsátása szükséges:

14.1 s e g é d t é t e l. Valamely hermitikus matrix karakterisztikus egyenletének nincs tisztán képzetes gyöke.

Ezen segédtétel bizonyítása a következő:

Tegyük fel — a segédtétel állításával ellentétben —, hogy egy hermitikus, tehát az $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^*$ összefüggést kielégítő matrix karakterisztikus egyenletének van egy tisztán képzetes gyöke. Legyen ez a gyök $i\mu$, ahol μ valamely zérustól különböző valós szám. Ha $i\mu$ gyöke az $\mathbf{A}$ matrix karakterisztikus egyenletének, akkor nyilván

$$|\mathbf{E}i\mu - \mathbf{A}| = 0, \tag{3.11}$$

tehát fennállanak az

$$|\mathbf{E}i\mu - \mathbf{A}|\,|\mathbf{E}i\mu + \mathbf{A}| = -|\mathbf{E}\mu^2 + \mathbf{A}^2| = -|\mathbf{E}\mu^2 + \mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{A}}^*| = 0 \tag{3.12}$$

egyenletek is, illetve az $|\mathbf{E}\mu^2 + \mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{A}}^*|$ determinánst a $|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}|$ karakterisztikus determinánsnak az 1. § c) β) IV°-ben ismertetett kifejtésének mintájára átírva, fennáll az alábbi egyenlet:

$$\mu^{2n} + \mu^{2n-2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\bar{a}_{kj} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.13}$$

ami azonban 0-tól különböző valós μ esetén nyilván nem lehet helyes, mert hiszen az egyenlet bal oldalán μ-nek csupa páros kitevőjű hatványa szerepel, továbbá a μ hatványainak együtthatójában egy-egy determináns az ő konjugáltjával van megszorozva, ami pozitív számot eredményez; az egyenlet bal oldalán tehát csupa pozitív szám összege szerepel, ami nyilván nem lehet nulla. Ezzel a segédtétel be van bizonyítva.

14.2 s e g é d t é t e l. Valamely hermitikus matrix karakterisztikus egyenletének összes gyökei valósak.

E második segédtétel az első segédtételből következik, és az alábbi módon igazolható:

Tegyük fel — a segédtétel állításával ellentétben —, hogy az $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^*$ hermitikus matrix karakterisztikus egyenletének van egy komplex gyöke. Legyen ez a komplex gyök $\lambda = \varkappa + i\mu$, ahol $\mu \neq 0$. Ez esetben fennáll az

$$|\mathbf{E}(\varkappa + i\mu) - \mathbf{A}| = 0 \tag{3.14}$$

egyenlet. Továbbá ez esetben nyilván a $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \varkappa\mathbf{E}$ matrix is hermitikus, fennáll az

$$|\mathbf{E}i\mu - (\mathbf{A} - \varkappa\mathbf{E})| = |\mathbf{E}i\mu - \mathbf{B}| = 0 \tag{3.15}$$

egyenlet is. Ennek az egyenletnek a fennállása azonban nem lehetséges, mert ellentmondásban van a fentebb bebizonyított segédtétellel; ti., ha az $|\mathbf{E}i\mu - \mathbf{B}| = 0$ egyenlet fennállana, akkor az $i\mu$ tisztán képzetes szám a $\mathbf{B}$ hermitikus matrix $|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{B}| = 0$ karakterisztikus egyenletének egyik gyöke volna. Hermitikus matrix karakterisztikus egyenletének tehát nem lehet komplex gyöke.

A bebizonyított két segédtétel alapján most már igazolhatók az alábbi tételek:

14. t é t e l. Egy hermitikus $\mathbf{A}$ matrix $|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| \equiv D(\lambda)$ karakterisztikus determinánsának összes $D_{11}(\lambda), \ldots, D_{nn}(\lambda)$ aldeterminánsa osztható a $D(\lambda)$ és $D'(\lambda)$ polinomok legnagyobb közös osztójával, azaz $(D(\lambda), D'(\lambda))$-val.

Az (1.24) egyenletben bemutattuk a $D(\lambda)$ determináns és aldeterminánsai között fennálló alábbi összefüggést:

$$D_{jj}(\lambda)\, D_{kk}(\lambda) - D_{jk}(\lambda)\, D_{kj}(\lambda) = D(\lambda)\, \underset{jk}{D}(\lambda).$$

Ebből következik, hogy:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{jk}(\lambda)\, D_{jk}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} D_{jj}(\lambda) \sum_{k=1}^{n} D_{kk}(\lambda) - D(\lambda) \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \underset{jk}{D}(\lambda). \tag{3.16}$$

Azonban az (1.21), illetve (1.22) egyenletek szerint

$$\sum^{n} D_{jj}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} D_{kk}(\lambda) = D'(\lambda) \qquad \text{és} \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \underset{jk}{D}(\lambda) = D''(\lambda) \tag{3.17}$$

és λ valós értékei mellett (hermitikus matrixról lévén szó, λ a fentiek értelmében csak valós lehet) nyilván $\overline{D_{jk}(\lambda)} = D_{kj}(\lambda)$, tehát valós λ esetén fennáll a következő azonosság (itt a $|D_{jk}(\lambda)|$ jelölés a $D_{jk}(\lambda)$ determináns abszolút értékét jelenti):

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |D_{jk}(\lambda)^2| \equiv D'(\lambda)^2 = D'(\lambda)^2 - D(\lambda)\, D''(\lambda). \tag{3.18}$$

P é l d á u l a fentebb bemutatott

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrix esetében, mint láttuk:

$$D(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \equiv \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1,$$

tehát:

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} |D_{jk}(\lambda)|^2 \equiv |D_{11}(\lambda)|^2 + |D_{12}(\lambda)|^2 + |D_{13}(\lambda)|^2 +$$
$$+ |D_{21}(\lambda)|^2 + |D_{22}(\lambda)^2 + D_{23}(\lambda)|^2 + |D_{31}(\lambda)|^2 + |D_{32}(\lambda)|^2 +$$
$$+ |D_{33}(\lambda)|^2 \equiv (\lambda^2 - \lambda)^2 + 0 + (\lambda - 1)^2 + 0 + (\lambda^2 - 1)^2 + 0 +$$
$$+ (\lambda - 1)^2 + 0 + (\lambda^2 - \lambda)^2 \equiv 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Továbbá:

$D'(\lambda) \equiv 3\lambda^2 - 2\lambda - 1,$
$D''(\lambda) \equiv 6\lambda - 2,$

tehát:

$$D'(\lambda)^2 - D(\lambda) \cdot D''(\lambda) \equiv 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Minthogy az **A** hermitikus matrix karakterisztikus egyenletének valamennyi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ gyöke valós, ezért a $D(\lambda)$ polinom $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \ldots, \lambda - \lambda_k$ prímtényezői is mind valós mennyiségek. Továbbá, mivel $D'(\lambda)$ osztható $(\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k - 1}$-nel és $D''(\lambda)$ osztható $(\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k - 2}$-nel, tehát a fentebbi azonosság jobb oldala és ennek következtében a bal oldala is osztható bármely $\lambda - \lambda_k$ prímtényező $2(\alpha_k - 1)$-edik hatványával. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha a bal oldali $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |D_{jk}(\lambda)|^2$ négyzetösszeg *mindegyik tagja* osztható

$$(\lambda - \lambda_k)^{2(\alpha_k - 1)}\text{-nel.}$$

Minthogy pedig az oszthatóság k minden értékére fennáll 1-től egészen n-ig, tehát mindegyik $D_{jk}(\lambda)$ aldetermináns osztható

$$(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{a_s - 1}\text{-gyel,}$$

ami éppen a $D(\lambda)$ és $D'(\lambda)$ polinomok legnagyobb közös osztójával egyenlő. Így a tétel be van bizonyítva. Az ily módon bebizonyított tétel következménye az alábbi tétel:

15. t é t e l. Hermitikus (illetve valós szimmetrikus) matrix minimál egyenletének csupa egyszeres, valós gyöke van.

Ugyanis a

$$\Delta(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\Theta(\lambda)} \tag{3.19}$$

összefüggésben $\Theta(\lambda)$ helyébe a $D(\lambda)$ és $D'(\lambda)$ legnagyobb közös osztója írható, tehát

$$\frac{D(\lambda)}{(D(\lambda), (D'(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n) = 0. \tag{3.20}$$

4. §. ANALITIKUS MATRIXFÜGGVÉNY HATVÁNYSORÁNAK MINIMÁLIS FOKSZÁMÚ MATRIXPOLINOMRA VALÓ REDUKÁLÁSA. MATRIXFÜGGVÉNY KANONIKUS ALAKJA EGYSZERES GYÖKKEL BÍRÓ MINIMÁL EGYENLET ESETÉN

a) Matrixfüggvény hatványsora és annak redukálása matrixpolinomra

α) Matrixfüggvény definíciója végtelen hatványsorral

Ha egy $f(x)$ függvény véges számú alapműveletet tartalmazó explicit képlettel van értelmezve, akkor valamely kvadratikus $\mathbf{A}$ matrixnak $f(\mathbf{A})$ függvényét egyszerűen úgy képezzük, hogy az $f(x)$ függvény definíciójában szereplő alapműveleteket az $\mathbf{A}$ matrixon végrehajtjuk; ez esetben a konstansok mellé mindig szorzóként oda kell írni a megfelelő dimenziójú egységmatrixot.

Például, ha

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}, \tag{4.1}$$

akkor

$$f(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{E}+\mathbf{A}}{\mathbf{E}-\mathbf{A}} = (\mathbf{E}+\mathbf{A})\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}. \tag{4.2}$$

(Itt is, mint általában bármely racionális törtfüggvény esetében, a megfelelő matrixfüggvény csak akkor létezik, ha a nevezőben szereplő matrix determinánsa nem nulla.)

Ha a függvény képlete az alapműveleteken kívül más műveleti jeleket is tartalmaz (például: $\sqrt{x}$ vagy e^x), vagy nem képlettel, hanem csupán egy konvencionális jellel van kifejezve (például: $\sin x$, $\ln x$), akkor ezeket a függvényeket matrixváltozó, azaz az $x = \mathbf{A}$ helyettesítés esetén csak akkor tudjuk értelmezni, ha erre a célra felhasználjuk a szóban forgó függvénynek általánosabb értelemben vett képletét, azaz végtelen hatványsorát. Miután a skalárváltozójú hatványsorok (konvergenciájuk esetén) változójuknak analitikus függvényeit állítják elő, ezért e hatványsorokból matrixváltozó behelyettesítése útján keletkező matrixokat a behelyettesített matrixváltozó analitikus függvényeinek nevezzük.

Legyen $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ a z skalárváltozónak konvergens hatványsora (analitikus függvénye). Ha a z skalárváltozó helyébe az $\mathbf{A}$ n-ed rendű kvadratikus matrixot helyettesítve és a konstansok mellé az n-ed rendű egységmatrixot szorzóként odaírva adódó

$$S_N(\mathbf{A}) = \sum_{\nu=0}^{N} c_\nu \mathbf{A}^\nu \tag{4.3}$$

matrix minden eleme $N \to \infty$ esetén véges határértékhez tart, akkor azt mondjuk, hogy az

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \mathbf{A}^\nu \tag{4.4}$$

matrix-hatványsor konvergens, és az $\mathbf{A}$ matrixnak $f(\mathbf{A})$ analitikus függvényét értelmezi.

Például

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots$$

$$e^{c\mathbf{A}} = \mathbf{E} + c\mathbf{A} + \frac{1}{2!}c^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}c^3\mathbf{A}^3 + \dots$$

$$\sin \mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \frac{1}{5!}\mathbf{A}^5 - + \dots$$

Ha a behelyettesített matrix egy projektor, akkor a végtelen hatványsor azonnal minimális fokszámú matrixpolinomra redukálható. Ha ugyanis $\mathbf{P}$ projektor, akkor a projektorokat jellemző $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^3 = \dots$ összefüggések felhasználásával *például:*

$$e^{c\mathbf{P}} = \mathbf{E} + c\mathbf{P} + \frac{c^2}{2!}\mathbf{P}^2 + \frac{c^3}{3!}\mathbf{P}^3 + \dots =$$

$$= \mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \dots\right) =$$

$$= \mathbf{E} + (e^c - 1)\,\mathbf{P}.$$

A (4.4) matrix-hatványsor konvergenciájára érvényes a következő §-ban bebizonyítandó alábbi tétel:

16. tétel. Ha az $\mathbf{A}$ matrix karakterisztikus egyenletének gyökei az $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ hatványsor konvergenciakörének[10] belsejébe esnek, akkor a $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \mathbf{A}^\nu$ matrix-hatványsor konvergens, és a minimál polinomnál alacsonyabb fokszámú matrixpolinomra redukálható.

β) Matrix-hatványsor redukálása matrixpolinomra egyszeres gyökkel bíró minimál polinom esetén

Mint már korábban megjegyeztük, csupán olyan matrixok függvényeinek kanonikus előállításával foglalkozunk, melyeknek minimál polinomja csupa egyszeres zérushellyel bír.

Legyen ennek megfelelőleg a vizsgált $\mathbf{A}$ matrix minimál polinomja:

$$\Delta(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_s); \text{ ahol } s \leqq n. \tag{4.5}$$

[10] Ugyanis a z változó komplex értékeket is felvehet.

Képezzük a $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ hatványsor N-edik részletösszegének, vagyis az $S_N(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_N z^N$ polinomnak és az A matrix $\Delta(z)$ minimál polinomjának a hányadosát ($N \geqq s$):

$$\frac{S_N(z)}{\Delta(z)} = Q_N(z) + \frac{R_N(z)}{\Delta(z)}, \tag{4.6}$$

ahol $Q_N(z)$ a hányados egész része és $\frac{R_N(z)}{\Delta(z)}$ a hányados törtrésze, tehát a (legfeljebb $(s-1)$-ed fokú) $R_N(z)$ polinom az osztási maradék. Nyilvánvaló, hogy

$$S_N(z) = \Delta(z)\, Q_N(z) + R_N(z). \tag{4.7}$$

Ha most ebbe az azonosságba a z skalárváltozó helyébe az **A** matrixot helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy minden matrix kielégíti a saját minimálegyenletét, azaz $\Delta(\mathbf{A}) = 0$, akkor adódik, hogy

$$S_N(\mathbf{A}) = R_N(\mathbf{A}). \tag{4.8}$$

Az R_N osztási maradék képzésével tehát az **A** matrixnak egy tetszőleges fokszámú polinomját egy legfeljebb $(s-1)$-ed fokú, illetve (ha az **A** matrix karakterisztikus polinomja megegyezik a minimál polinommal) legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomjával helyettesíthetjük.

Például az

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrix („harmadrendű primitív ciklikus matrix") karakterisztikus polinomja:

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 1 =$$

$$= [\lambda - 1]\left[\lambda - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right]\left[\lambda - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right].$$

Minthogy a karakterisztikus polinomnak csupa egyszeres gyöke van, tehát a karakterisztikus polinom ez esetben azonos a minimál polinommal, tehát

$$\Delta(z) = D(z) = z^3 - 1.$$

A fentiek szerint mármost az $\mathbf{\Omega}$ matrix bármely N-ed fokú polinomja egy $(N-2)$-ed fokú polinomra vezethető vissza. Legyen adva például a

$$S_5(\mathbf{\Omega}) = c + c_1\mathbf{\Omega} + c_2\mathbf{\Omega}^2 + c_3\mathbf{\Omega}^3 + c_4\mathbf{\Omega}^4 + c_5\mathbf{\Omega}^5$$

ötödfokú matrixpolinom. Ez esetben nyilván:

$$S_5(z) = c + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5;$$

tehát

$$\frac{S_5(z)}{\Delta(z)} = c_5 z^2 + c_4 z + c_3 + \frac{(c_2 - c_5) z_2 + (c_1 - c_4) z + (c_0 - c_3)}{z^3 - 1}.$$

Jelen esetben tehát az osztási maradék:

$$R_5(z) = (c_2 - c_5) z^2 + (c_1 - c_4) z + (c_0 - c_3);$$

és így a fentiek értelmében:

$$R_5(\mathbf{\Omega}) = (c_2 - c_5) \mathbf{\Omega}^2 + (c_1 - c_4) \mathbf{\Omega} + (c_0 - c_3) \mathbf{E}.$$

A $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \mathbf{A}^\nu$ végtelen hatványsor a fentiek szerint az $S_N(\mathbf{A})$ részletösszegek végtelen sorozata helyett — a (4.8) képlet szerint — tehát az $R_N(\mathbf{A})$ maradékpolinomok végtelen sorozatával is kifejezhető. Az $R_N(\mathbf{A})$ matrixpolinom képzéséhez szükséges $R_N(z)$ skalár-maradékpolinomok sorozatának effektív kiszámítása osztás útján gyakorlatilag kivitelezhetetlennek minősítendő mind a formális, mind még inkább a numerikus számítás szempontjából. Éppen ezért alapvető az a felismerés, hogy *az $R_N(z)$ osztási maradékok explicite kifejezhetők a Lagrange-féle interpolációs polinomokkal.*[11] A (4.7) egyenlet szerint ugyanis

$$R_N(\lambda_1) = S_N(\lambda_1), \quad R_N(\lambda_2) = S_N(\lambda_2), \quad \ldots, \quad R_N(\lambda_s) = S_N(\lambda_s); \tag{4.9}$$

mert $\Delta(\lambda_1) = \Delta(\lambda_2) = \ldots = \Delta(\lambda_s) = 0$. Minthogy pedig az $R_N(z)$ polinom fokszáma legfeljebb $s - 1$ ($s \leqq n$), tehát $R_N(z)$ a (4.9) szám alatt összefoglalt s darab egyenlettel egyértelműen meg van határozva.[12] Az a legfeljebb $(s-1)$-ed fokú polinom pedig, amely a (4.9) egyenleteket kielégíti, vagyis a független változó helyébe λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$-et helyettesítve, éppen az $S_N(\lambda_1)$, $S_N(\lambda_2), \ldots, S_N(\lambda_s)$ értékeket veszi fel, az $S_N(z)$: $\Delta(z)$ osztás elvégzése nélkül könnyen megszerkeszthető az ún. *„Lagrange-féle alappolinomok"* [jelképük: $L_k(z)$] segítségével, ahol:

$$L_k(z) \equiv \frac{\Delta(z)}{\Delta'(z_k) \cdot (z - \lambda_k)} \equiv \tag{4.10}$$

$$\equiv \frac{(z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_{k-1}) (z - \lambda_{k+1}) \ldots (z - \lambda_s)}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_s)}.$$

A Lagrange-féle alappolinomok részletesen kiírt alakjából rögtön látható, hogy

$$L_k(\lambda_k) = 1 \tag{4.11}$$

és

$$L_k(\lambda_1) = L_k(\lambda_2) = \ldots = L_k(\lambda_{k-1}) = L_k(\lambda_{k+1}) = \ldots = L_k(\lambda_s) = 0; \tag{4.12}$$

[11] Ha a minimál polinomnak többszörös gyökei is vannak, akkor a Hermite-féle interpolációs polinomok alkalmazása válik szükségessé.

[12] Ugyanis általában egy s-ed fokú polinom együtthatóinak megfelelő választásával $s + 1$ tetszés szerint előírt feltételt elégíthetünk ki; ha tehát előírjuk, hogy egy polinom $s + 1$ számú általunk kijelölt független változó értéknél bizonyos általunk megadott értékeket vegyen fel, akkor ezáltal a polinom (illetve annak együtthatói) már egyértelműen meg van határozva.

vagyis mindegyik Lagrange-féle alappolinom a vele közös indexű λ_k interpoláló helyen $+1$ értéket vesz fel, a többi $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_s)$ interpoláló helyen pedig eltűnik.

Ezen alappolinomok felhasználásával a legfeljebb $(s-1)$-ed fokú (illetve $s=n$ esetében $(n-1)$-ed fokú) $R_N(z)$ osztási maradék az osztás effektív elvégzése nélkül a következőképpen írható fel:

$$R_N(z) = S_N(\lambda_1)L_1(z) + S_N(\lambda_2)L_2(z) + \ldots + S_N(\lambda_s)L_s(z), \tag{4.13}$$

ebből a (4.8) összefüggés figyelembevételével a minket érdeklő maradéksorozat.

$$S_N(\mathbf{A}) = S_N(\lambda_1)L_1(\mathbf{A}) + S_N(\lambda_2)L_2(\mathbf{A}) + \ldots + S_N(\lambda_s)L_s(\mathbf{A}). \tag{4.14}$$

Ha már most — a $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \mathbf{A}^\nu$ matrix-hatványsor kifejezése végett — ennek az $S_N(\mathbf{A})$ kifejezésnek a határértékét keressük minden határon túl növekvő N esetén, minthogy a jobb oldalon álló $L_1(\mathbf{A})$, $L_2(\mathbf{A})$, $\ldots$, $L_s(\mathbf{A})$ matrixok N-től függetlenek, a $N \to \infty$ határátmenet a skalártényezőkben nehézség nélkül elvégezhető. Minthogy — korábbi feltevésünk szerint — a $\mathbf{A}$ matrix karakterisztikus egyenletének gyökei, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ a $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ hatványsor konvergenciakörének belsejébe esnek,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\lambda_k) = f(\lambda_k), \tag{4.15}$$

tehát

$$f(\mathbf{A}) = \lim_{N\to\infty} S_N(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)L_1(\mathbf{A}) + f(\lambda_2)L_2(\mathbf{A}) + \ldots + f(\lambda_s)L_s(\mathbf{A}). \tag{4.16}$$

Ily módon kimutattuk, hogy az előírt feltételek mellett az $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvény értelmezve van, és kifejeztük azt az $L_k(\mathbf{A})$ matrixpolinomok lineáris alakjával.

Ezzel be van bizonyítva a következő tétel:

17. tétel. Ha az $\mathbf{A}$ matrix minimál egyenletének valamennyi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ gyöke egyszeres, ha továbbá az $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ hatványsor konvergenciaköre ezeket a gyököket a belsejében tartalmazza, akkor az $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvény előállítható Lagrange-féle matrixpolinomok lineáris alakjaként, éspedig $f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) L_k(\mathbf{A})$.

γ) A Lagrange-féle matrixpolinomok rangja

Állapítsuk meg az $f(A) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) \cdot L_k(\mathbf{A})$ kifejezésben szereplő $L_1(\mathbf{A}), L_2(\mathbf{A}), \ldots, L_s(\mathbf{A})$ matrixpolinomok rangszámát. A Lagrange-féle alappolinomok közt nyilván fennáll a $\sum_{k=1}^{s} L_k(z) \equiv 1$ identitás. Ugyanis a $\sum_{k=1}^{s} L_k(z) - 1$ kifejezés egy legfeljebb $(s-1)$-ed fokú polinom, amely a $z = \lambda_1, z = \lambda_2, \ldots, z = \lambda_s$ helyeken, tehát s számú különböző helyen

zérussal egyenlő, ebből következik, hogy a $\sum_{k=1}^{s} L_k(z) - 1$ polinom azonosan zérussal egyenlő, vagyis a $\sum_{k=1}^{s} L_k(z)$ kifejezés azonosan eggyel egyenlő. A $\sum_{k=1}^{s} L_k(z) \equiv 1$ identitásból viszont következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{s} L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{E}, \tag{4.17}$$

tehát az összeg rangjára vonatkozó 4. tétel szerint

$$\varrho\left\{\sum_{k=1}^{s} L_k(\mathbf{A})\right\} \leqq \sum_{k=1}^{s} \varrho\{L_k(\mathbf{A})\}, \tag{4.18}$$

és mert

$$\varrho\left\{\sum_{k=1}^{s} L_k(\mathbf{A})\right\} = \varrho\{\mathbf{E}\} = n, \tag{4.19}$$

ily módon:

$$\sum_{k=1}^{s} \varrho\{L_k(\mathbf{A})\} \geqq n. \tag{4.20}$$

Másrészt a (4.10) azonosságból következik, hogy

$$(z - \lambda_k) L_k(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)}, \tag{4.21}$$

tehát z helyébe az $\mathbf{A}$ matrixot helyettesítve:

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \cdot L_k(\mathbf{A}) = 0. \tag{4.22}$$

Ha továbbá $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s}$, akkor a $D(\lambda)$ polinom akármelyik α_k-adik deriváltja a $z - \lambda_k$ helyen zérustól különböző értéket vesz fel, azaz $D^{(\alpha_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Ebből viszont — minthogy $D^{(\alpha_k)}(\lambda)$ éppen a $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ determináns $(n - \alpha_k)$-ad rendű főminorainak összegével egyenlő — az következik, hogy a $|\lambda_k\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ determináns $(n - \alpha_k)$-ad rendű főminorai között van legalább egy, amely nem zérus, tehát a $\{\lambda_k\mathbf{E} - \mathbf{A}\}$ matrix rangja nem kisebb, mint $n - \alpha_k$. Minthogy $\varrho\{\lambda_k\mathbf{E} - \mathbf{A}\} \geqq n - \alpha_k$, tehát az $\{\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{E}\} L_k(\mathbf{A}) = 0$ egyenletből a 9. felhasználásával következik, hogy

$$\varrho\{L_k(\mathbf{A})\} \leqq \alpha_k, \tag{4.23}$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{s} \varrho\{L_k(\mathbf{A})\} \leqq \sum_{k=1}^{s} \alpha_k, \tag{4.24}$$

és mert $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n$, tehát

$$\sum_{k=1}^{s} \varrho\{L_k(\mathbf{A})\} \leqq n. \tag{4.25}$$

A (4.20) és (4.25) egyidejű fennállása azonban csak akkor lehetséges, ha

$$\varrho\{L_k(\mathbf{A})\} = \alpha_k.$$

Ily módon kimutattuk, hogy a (4.16) előállításban szereplő $L_k(\mathbf{A})$ matrixpolinom rangja éppen a $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ karakterisztikus egyenlet λ_k gyökének a multiplicitásával egyenlő.

δ) A Lagrange-féle matrixpolinomok projektortulajdonsága és ortogonalitása

Az $L_k(z)$ Lagrange-féle alappolinomok bizonyos oszthatósági tulajdonságokkal bírnak, melyekből az $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvény alakjának további egyszerűsítése szempontjából alapvető következtetéseket fogunk levonni.

I°. Projektor-tulajdonság. Az $L_k(z)$ polinom a (4.11), (4.12) egyenletek szerint eltűnik a $z = \lambda_1, \ldots, z = \lambda_{k-1}, z = \lambda_{k+1}, \ldots, z = \lambda_s$ helyeken, és az $L_k(z) - 1$ kifejezés zérus a $z = \lambda_k$ helyen. Eszerint az $L_k(z)\{L_k(z) - 1\}$ szorzat eltűnik az $\mathbf{A}$ matrix $\Delta(z)$ minimál polinomjának valamennyi zérushelyén, tehát fennáll az alábbi azonosság:

$$L_k(z)\{L_k(z) - 1\} \equiv L_k(z)^2 - L_k(z) \equiv \Delta(z) \cdot Q(z), \tag{4.26}$$

ahol a $Q(z)$ tényező alakja a továbbiak szempontjából lényegtelen. Az $L_k(z)^2 - L_k(z) \equiv \Delta(z) \cdot Q(z)$ azonosságból z helyébe $\mathbf{A}$-t írva nyerjük, hogy:

$$L_k(\mathbf{A})^2 - L_k(\mathbf{A}) = 0. \tag{4.27}$$

Ezzel bebizonyítottuk az alábbi tételt:

18. tétel. Ha az $\mathbf{A}$ matrix minimál egyenletének egyszeres gyökei: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, akkor az e helyeken interpoláló Lagrange-polinomokból $z = \mathbf{A}$ helyettesítéssel adódó matrixpolinomok mindegyike projektor.

Fentebb kimutattuk, hogy $\varrho\{L_k(\mathbf{A})\} = \alpha_k$. Ezt figyelembe véve, $L_k(\mathbf{A})$ felbontható α_k számú diád összegére:

$$L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^* + \mathbf{u}_{k2}\mathbf{v}_{k2}^* + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*. \tag{4.28}$$

Minthogy azonban a most bizonyított tétel szerint $L_k(\mathbf{A})$ projektor, ezért a 2. §-ban közölt 11. tétel értelmében $L_k(\mathbf{A})$ bármely (4.28) alakú felbontásában a diádok automatikusan biortogonalizálva vannak, azaz

$$\mathbf{u}_{ki}^* \cdot \mathbf{v}_{kj} = 0, \quad \text{ha } i \neq j$$

és

$$\mathbf{u}_{ki}^* \cdot \mathbf{v}_{ki} = 1,$$

ahol $i = 1, 2, \ldots, \alpha_k$ és $j = 1, 2, \ldots, \alpha_k$. Ennek következtében az $\mathbf{u}_{ki}$, illetve $\mathbf{v}_{kj}^*$ tényezők egyszersmind az $L_k(\mathbf{A})$ projektor jobb, illetve bal oldali sajátvektorai.

II°. Ortogonalitás. Minthogy a (4.11), (4.12) egyenletek szerint $L_k(z)$ eltűnik a $\lambda_1, \ldots, \lambda_h, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} \ldots, \lambda_s$ helyeken, és $L_h(z)$ eltűnik a $\lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}, \lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_s$ helyeken, tehát $k \neq h$ esetén $L_h(z)\,L_k(z)$ eltűnik a $\Delta(z)$ polinom valamennyi zérushelyén. Felírható tehát az

$$L_h(z)\,L_k(z) \equiv \Delta(z)\,Q(z); \quad h \neq k \tag{4.29}$$

azonosság, ahol a $Q(z)$ tényező alakja a továbbiak szempontjából lényegtelen. A z helyébe $\mathbf{A}$-t írva, azt nyerjük, hogy

$$L_h(\mathbf{A})\,L_k(\mathbf{A}) = L_k(\mathbf{A})\,L_h(\mathbf{A}) = 0. \tag{4.30}$$

Ebből következik, hogy amennyiben az α_h rangú $L_h(\mathbf{A})$, illetőleg az α_k rangú $L_k(\mathbf{A})$ matrixok diadikus előállításai

$$L_h(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_{h1}\mathbf{v}_{h1}^* + \ldots + \mathbf{u}_{h\alpha_h}\mathbf{v}_{h\alpha_h}^* = [\mathbf{u}_{h1}, \ldots, \mathbf{u}_{h\alpha_h}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{h1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{h\alpha_h}^* \end{bmatrix},$$

illetőleg

$$L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^* + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^* = [\mathbf{u}_{k1}, \ldots, \mathbf{u}_{k\alpha_k}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k\alpha_k}^* \end{bmatrix},$$

akkor

$$L_h(\mathbf{A})L_k(\mathbf{A}) = [\mathbf{u}_{h1}, \ldots, \mathbf{u}_{h\alpha_h}] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{h1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{h\alpha_h}^* \end{bmatrix} [\mathbf{u}_{k1}, \ldots, \mathbf{u}_{k\alpha_k}] \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k\alpha_k}^* \end{bmatrix} = 0, \tag{4.31}$$

tehát a II. fejezetben közölt 8. tétel értelmében a középső tényező eltűnik, amiből következik, hogy $\mathbf{v}_{ki}^*\mathbf{u}_{hj} = 0$, ha $k \neq h$; $i = 1, 2, \ldots, \alpha_h$ és $j = 1, 2, \ldots, \alpha_k$. Ezzel bebizonyítást nyert, hogy bármelyik $L_h(\mathbf{A})$ Lagrange-féle matrixpolinomnak valamennyi bal (illetve jobb) oldali sajátvektora ortogoná is az összes többi $L_k(\mathbf{A})$ Lagrange-féle matrixpolinomnak valamennyi jobb (illetve bal) oldali sajátvektorára.

Példák

β | 1. Számítsuk ki $e^{\mathbf{A}}$ kifejezést *a*) a definíció alapján, *b*) Lagrange-féle interpoláló polinomokkal, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) $e^{\mathbf{A}}$ kifejezése a definíció szerint:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \ldots$$

$\mathbf{A}$ karakterisztikus egyenlete:

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 1 & \lambda & -4 \\ -3 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 26\lambda = 0.$$

Tehát

$$\mathbf{A}^3 + 26\mathbf{A} = 0.$$

(Vigyázzunk! $\mathbf{A}$-val nem lehet egyszerűsíteni, mert $|\mathbf{A}| = 0$!) Vagyis

$$\mathbf{A}^3 = -26\,\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^5 = -26\,\mathbf{A}^3 = 26^2\,\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^7 = -26^3\,\mathbf{A}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{A}^{2n+1} = (-1)^n\,26^n\,\mathbf{A}$$

és az

$$\mathbf{A}^4 = -26\,\mathbf{A}^2 \text{ relációból}$$
$$\mathbf{A}^6 = -26\,\mathbf{A}^4 = 26^2\,\mathbf{A}^2$$
$$\mathbf{A}^8 = -26^3\,\mathbf{A}^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{A}^{2n} = (-1)^{n-1}\,26^{n-1}\,\mathbf{A}^2.$$

Tehát:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \frac{1}{1!}\mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots =$$

$$= \mathbf{E} + \frac{1}{1!}\mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 - \frac{1}{3!}26\mathbf{A} - \frac{1}{4!}26\mathbf{A}^2 + \frac{1}{5!}26^2\mathbf{A} + \frac{1}{6!}26^2\mathbf{A}^2 - + \dots =$$

$$= \mathbf{E} + \mathbf{A}\left(\frac{1}{1!} - 26\frac{1}{3!} + 26^2\frac{1}{5!} - + \dots\right) + \mathbf{A}^2\left(\frac{1}{2!} - 26\frac{1}{4!} + 26^2\frac{1}{6!} - + \dots\right) =$$

$$= \mathbf{E} + \frac{1}{\sqrt{26}}\mathbf{A}\left(\frac{\sqrt{26}}{1!} - \frac{(\sqrt{26})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{26})^5}{5!} - + \dots\right) -$$

$$- \frac{1}{26}\mathbf{A}^2\left(1 - \frac{(\sqrt{26})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{26})^4}{4!} - \frac{(\sqrt{26})^6}{6!} - + \dots - 1\right) =$$

$$= \mathbf{E} + \frac{\sin\sqrt{26}}{\sqrt{26}}\mathbf{A} - \frac{\cos\sqrt{26} - 1}{26}\mathbf{A}^2.$$

Mivel

$$\frac{\sin\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = -0{,}182; \quad \frac{\cos\sqrt{26} - 1}{26} = -0{,}0245$$

és

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 12 & 4 \\ 12 & -17 & 3 \\ 4 & 3 & -25 \end{bmatrix},$$

ezért $$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0{,}182 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ 0{,}0245 \begin{bmatrix} -10 & 12 & 4 \\ 12 & -17 & 3 \\ 4 & 3 & -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0{,}182 & 0{,}546 \\ 0{,}182 & 0 & -0{,}728 \\ -0{,}546 & 0{,}728 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -0{,}245 & 0{,}294 & 0{,}098 \\ 0{,}294 & -0{,}417 & 0{,}074 \\ 0{,}098 & 0{,}074 & -0{,}613 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}755 & 0{,}112 & 0{,}644 \\ 0{,}476 & 0{,}583 & -0{,}654 \\ -0{,}448 & 0{,}802 & 0{,}387 \end{bmatrix}.$$

b) A

$$\lambda^3 + 26\lambda = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_1 = 0; \qquad \lambda_2 = +\sqrt{26}j; \qquad \lambda_3 = -\sqrt{26}j.$$

A Lagrange-féle polinomok:

$$L_1(\lambda) = \frac{(\lambda - \sqrt{26}\,j)(\lambda + \sqrt{26}\,j)}{(-\sqrt{26}\,j)(+\sqrt{26}\,j)} = \frac{1}{26}(\lambda^2 + 26);$$

$$L_2(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda + \sqrt{26}\,j)}{\sqrt{26}\,j \cdot 2 \cdot \sqrt{26}\,j} = -\frac{1}{52}(\lambda^2 + \sqrt{26}\,j\lambda);$$

$$L_3(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda - \sqrt{26}\,j)}{(-\sqrt{26}\,j)(-2 \cdot \sqrt{26}\,j)} = -\frac{1}{52}(\lambda^2 - \sqrt{26}\,j\lambda).$$

λ helyébe **A**-t írunk:

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{26}(\mathbf{A}^2 + 26\mathbf{E}); \qquad L_2(\mathbf{A}) = -\frac{1}{52}(\mathbf{A}^2 + \sqrt{26}\,j\,\mathbf{A});$$

$$L_3(\mathbf{A}) = -\frac{1}{52}(\mathbf{A}^2 - \sqrt{26}\,j\,\mathbf{A}).$$

Behelyettesítünk az

$$f(\mathbf{A}) = \sum_k f(\lambda_k) L_k(\mathbf{A})$$

képletbe:

$$e^{\mathbf{A}} = e^0 \frac{1}{26}(\mathbf{A}^2 + 26\mathbf{E}) - \frac{1}{52} e^{\sqrt{26}j}(\mathbf{A}^2 + \sqrt{26}\,j\,\mathbf{A}) - \frac{1}{52} e^{-\sqrt{26}j}(\mathbf{A}^2 - \sqrt{26}\,j\,\mathbf{A}).$$

Felhasználva az Euler-relációt, mely szerint

$$e^{\pm\sqrt{26}j} = \cos\sqrt{26} \pm j \sin\sqrt{26},$$

és az utolsó két tagot összevonva kapjuk:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \frac{1}{26}\mathbf{A}^2 - \frac{1}{26}(\cos\sqrt{26}\,\mathbf{A}^2 - \sqrt{26}\sin\sqrt{26}\,\mathbf{A}) =$$

$$= \mathbf{E} + \frac{\sin\sqrt{26}}{\sqrt{26}}\mathbf{A} - \frac{\cos\sqrt{26} - 1}{26}\mathbf{A}^2.$$

Eredményünk tehát egyezik az előbb kapott kifejezéssel.

2. Mivel egyenlő $\sin \mathbf{A}$ matrix, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

Először meghatározzuk a karakterisztikus egyenlet gyökeit:

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 8 & \lambda & 1 \\ -4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda\{(\lambda-2)^2 - 4\} + \lambda - 2 + 8 =$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0.$$

Ennek egyik gyöke: $\lambda_1 = -1$. $(\lambda + 1)$ gyöktényezővel osztva:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)(\lambda + 1) = 0.$$

Ebből: $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$.

A Lagrange-féle polinomok:

$$L_1(\lambda) = \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{(-3)(-4)} = \frac{1}{12}(\lambda^2 - 5\lambda + 6);$$

$$L_2(\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda-3)}{3(-1)} = -\frac{1}{3}(\lambda^2 - 2\lambda - 3);$$

$$L_3(\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)}{4\cdot 1} = \frac{1}{4}(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

$\mathbf{A}^2$-et kiszámítjuk, és λ helyébe $\mathbf{A}$-t írunk:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -20 & -1 & -10 \\ 8 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{12}(\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{E}) = \frac{1}{12}\left(\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -20 & -1 & -10 \\ 8 & 2 & 7 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} +\right.$$

$$+6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Bigg)=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4&1&-1\\20&5&-5\\-12&-3&3\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}[4,\ 1,\ -1].$$

$$L_2(\mathbf{A})=-\frac{1}{3}(\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-3\mathbf{E})=-\frac{1}{3}\Bigg(\begin{bmatrix}8&1&4\\-20&-1&-10\\8&2&7\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&0&1\\-8&0&-1\\4&1&2\end{bmatrix}-$$

$$-3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Bigg)=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&2\\-4&-4&-8\\0&0&0\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-4\\0\end{bmatrix}[1,\ 1,\ 2],$$

$$L_3(\mathbf{A})=\frac{1}{4}(\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-2\mathbf{E})=\frac{1}{4}\Bigg(\begin{bmatrix}8&1&4\\-20&-1&-10\\8&2&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&1\\-8&0&-1\\4&1&2\end{bmatrix}-$$

$$-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Bigg)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&1&3\\-12&-3&-9\\4&1&3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}[4,\ 1,\ 3].$$

Ezek után felírhatjuk $\sin \mathbf{A}$ kifejezését.

$$\sin \mathbf{A}=\sin(-1)\cdot L_1(\mathbf{A})+\sin 2\cdot L_2(\mathbf{A})+\sin 3\cdot L_3(\mathbf{A}).$$

Mivel $\sin(-1)=-\sin 1=-\sin 57{,}3^\circ=-0{,}842$,

$$\sin 2=\sin 114{,}6^\circ=\sin 65{,}4^\circ=0{,}909,$$

$$\sin 3=\sin 171{,}9^\circ=\sin 8{,}1^\circ=0{,}141,$$

ezért

$$\sin \mathbf{A}=-\frac{0{,}842}{12}\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}[4,\ 1,\ -1]-\frac{0{,}909}{3}\begin{bmatrix}1\\-4\\0\end{bmatrix}[1,\ 1,\ 2]+$$

$$+\frac{0{,}141}{4}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}[4,\ 1,\ 3].$$

Ha elvégezzük a numerikus számítást, az alábbi eredményt nyerjük:

$$\sin \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}443 & -0{,}338 & -0{,}431 \\ -0{,}608 & 0{,}757 & 2{,}459 \\ 0{,}980 & 0{,}245 & -0{,}105 \end{bmatrix}.$$

3. Számítsuk ki $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrix természetes logaritmusát, azaz

$$\ln \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = ?$$

$\mathbf{A}$ karakterisztikus egyenlete:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 6) - 6 = \lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda_1 = 8; \qquad \lambda_2 = 3.$$

A Lagrange-féle polinomok:

$$L_1(\lambda) = \frac{1}{5}(\lambda - 3); \qquad L_2(\lambda) = -\frac{1}{5}(\lambda - 8).$$

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{5}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}[1, \quad 1]:$$

$$L_2(\mathbf{A}) = -\frac{1}{5}(\mathbf{A} - 8\mathbf{E}) = -\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[3, \quad -2].$$

Tehát

$$\ln \mathbf{A} = \ln 8 \cdot L_1(\mathbf{A}) + \ln 3 \cdot L_2(\mathbf{A}) = \frac{2{,}079}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}[1, \quad 1] - \frac{1{,}099}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[3, \quad -2].$$

A numerikus számításokat elvégezve, a

$$\ln \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1{,}496 & 0{,}396 \\ 0{,}594 & 1{,}694 \end{bmatrix}$$

eredményt kapjuk.

b) Matrixfüggvények kanonikus előállítása

α) Matrixfüggvények kanonikus előállításának alaptétele

Az előző pontban foglaltakból következik a 19. tétel. Ha az **A** matrix karakterisztikus polinomja: $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s}$, minimál polinomja $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$, és ha továbbá az $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ hatványsor konvergenciaköre a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ helyeket a belsejében tartalmazza, akkor az $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvény a következő kanonikus alakban állítható elő:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) L_k(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) (\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^* + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*), \tag{4.32}$$

ahol $L_k(z) = \dfrac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)(z - \lambda_k)}$ és az $\mathbf{u}_{ki}$, $\mathbf{v}_{ki}^*$ vektorok biortogonális rendszert alkotnak.

Az $\mathbf{u}_{k1}, \dots, \mathbf{u}_{k\alpha_k}$, illetőleg $\mathbf{v}_{k1}^*, \dots, \mathbf{v}_{k\alpha_k}^*$ vektorok az **A** matrixnak a λ_k sajátértékhez tartozó jobb, illetőleg bal oldali sajátvektorai. Egy sajátértékhez tehát annyi jobb, illetőleg bal oldali sajátvektor tartozik, amennyi az ő multiplicitása, így az összes sajátvektorok száma mindig a matrix rendszámával egyenlő.

Az $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvény kanonikus felbontásából $f(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}$, azaz $f(z) = z$ esetben magának az **A** matrixnak

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^* + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*) \tag{4.33}$$

kanonikus felbontása adódik.

A (4.32) és (4.33) képletekből látható, hogy *az* **A** *matrixnak és a belőle képzett tetszés szerinti* $f(\mathbf{A})$ *matrixfüggvénynek a sajátvektorai közösek. Továbbá, ha az* **A** *matrix sajátértékei* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, *akkor az* $f(\mathbf{A})$ *matrix sajátértékei* $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda)_s$.

Egy matrix vagy ezen matrix valamilyen függvénye kanonikus alakjának *tényleges megszerkesztése* ezek szerint a következő lépésekben történik:

Először: Kiszámítjuk a matrix $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ karakterisztikus gyökeit vagy más néven sajátértékeit a $D(\lambda) \equiv |\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldása útján. Amennyiben előfordulnának többszörös gyökök is, úgy megállapítjuk, hogy a $\Delta(\lambda) \equiv \dfrac{D(\lambda)}{\Theta(\lambda)} = 0$ minimál egyenletnek csupa egyszeres gyöke van-e. (Hermitikus, valós szimmetrikus, továbbá ciklikus matrixok minimál egyenletének csupa egyszeres gyöke van!)

Másodszor: Megszerkesztjük a minimál egyenlet egyszeres gyökeihez tartozó, tehát a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ helyeken interpoláló $L_1(z), L_2(z), \dots, L_s(z)$ Lagrange-polinomokat, illetve az $L_1(\mathbf{A}), L_2(\mathbf{A}), \dots, L_s(\mathbf{A})$ Lagrange-féle matrixpolinomokat. Ezek segítségével az **A** matrix vagy annak valamely $f(\mathbf{A})$ függvénye már előállítható

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k L_k(\mathbf{A}), \qquad \text{illetve} \qquad f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) L_k(\mathbf{A})$$

alakban.

Harmadszor: Az $L_1(\mathbf{A}), L_2(\mathbf{A}), \ldots, L_s(\mathbf{A})$ matrixok diadikus felbontásával megállapítjuk a sajátvektorokat. Az $L_k(\mathbf{A})$ matrix diadikus felbontása éppen annyi jobb, illetve bal oldali sajátvektort szolgáltat, amennyi a λ_k gyök multiplicitása.

Negyedszer: A fenti sorrendben meghatározott adatok alapján a (4.32) kanonikus előállítás felírható:

Példa. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Keresendő magának az **A** matrixnak, továbbá az $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ matrixfüggvénynek a kanonikus előállítása.

A fentiek szerint először meghatározzuk az **A** matrix karakterisztikus gyökeit. Nyilván

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

tehát a karakterisztikus gyökök (sajátértékek) a következők:

$$\lambda_1 = 1 \text{ (kétszeres gyök) és } \lambda_2 = 2.$$

Továbbá, minthogy a karakterisztikus egyenletnek kettős gyöke van, és **A** nem tartozik sem a hermitikus, sem a valós szimmetrikus, sem pedig a ciklikus matrixok közé, meg kell állapítanunk, hogy az **A** matrix minimál egyenletének nincs-e többszörös gyöke.

E célból először képeznünk kell az $\{\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}\}$ matrix adjungáltját:

$$\operatorname{adj}\{\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}\} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 0 & 2(\lambda - 1) \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 1) \end{bmatrix},$$

tehát az $\operatorname{adj}\{\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}\}$ matrix elemeinek, vagyis a $|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}|$ másodrendű aldeterminánsainak a legnagyobb közös osztója: $\Theta(\lambda) = \lambda - 1$. Ebből azonnal adódik az **A** matrix minimál polinomja:

$$\Delta(\lambda) \equiv \frac{D(\lambda)}{\Theta(\lambda)} \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

tehát az **A** matrix minimál polinomjának csupa egyszeres zérushelye van.

Másodszor: Megszerkesztjük a $\lambda_1 = -1$ és a $\lambda_2 = 2$ gyökökhöz (a minimál egyenlet egyszeres gyökeihez) tartozó $L_1(z)$ és $L_2(z)$ Lagrange-polinomokat:

$$L_1(z) = \frac{z - 2}{1 - 2} = 2 - z,$$

és

$$L_2(z) = \frac{z - 1}{2 - 1} = z - 1,$$

továbbá képezzük az $L_1(\mathbf{A})$ és $L_2(\mathbf{A})$ matrix

$$L_1(\mathbf{A}) = 2\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$L_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Harmadszor: Előállítjuk az $L_1(\mathbf{A})$ és $L_2(\mathbf{A})$ matrixok diadikus felbontását. II. fejezet 2. §-ában ismertetett módszerrel azt nyerjük, hogy:

$$L_1(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1, \ 0 \ -2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0, \ 1, \ 0]$$

és

$$L_2(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(A fentiekben előadottaknak megfelelően a $\lambda_1 = 1$ kettős karakterisztikus gyökhöz tartozó $L_1(\mathbf{A})$ valóban másodrangú, tehát két diád összegére bontható, a $\lambda_2 = 2$ egyszeres karakterisztikus gyökhöz tartozó $L_2(\mathbf{A})$ pedig elsőrangú, tehát egyetlen diádként állítható elő.)

Negyedszer: Az $\mathbf{A}$ matrix kanonikus előállítása ezek szerint a következő:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1, \ 0, \ -2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0, \ 1, \ 0] \right\} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, \ 0, \ 1]$$

A $\lambda_1 = 1$ kettős karakterisztikus gyökhöz tartozó két darab jobb oldali sajátvektor:

$$\mathbf{u}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

az ugyanezen karakterisztikus gyökhöz tartozó bal oldali sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_{11}^* = [1, \ 0, \ -2] \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_{12}^* = [0, \ 1, \ 0];$$

továbbá a $\lambda_2 = 2$ egyszeres karakterisztikus gyökhöz tartozó jobb oldali sajátvektor:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

és bal oldali sajátvektor:

$$\mathbf{v}_2^* = [0, \ 0, \ 1].$$

Az $\mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{12}, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_2$ vektorok valóban biortogonalizált vektorrendszert alkotnak.

Továbbá az $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ matrixfüggvény kanonikus előállítása:

$$(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 1^2 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1, \ 0, \ -2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0, \ 1, \ 0] \right\} +$$

$$+ 2^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, \ 0, \ 1].$$

Ha $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^*$, azaz $\mathbf{A}$ hermitikus, akkor a minimál polinomnak csupa egyszeres zérushelye van, tehát *minden hermitikus matrix előállítható a*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\mathbf{u}_{k1} \bar{\mathbf{u}}_{k1}^* + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k} \bar{\mathbf{u}}_{k\alpha_k}^*) \tag{4.34}$$

kanonikus alakban.

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, *azaz* $\mathbf{A}$ *valós szimmetrikus matrix, akkor kanonikus előállítása:*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\mathbf{u}_{k1} \mathbf{u}_{k1}^* + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k} \mathbf{u}_{k\alpha_k}^*). \tag{4.35}$$

Példa

Másodrendű kvadratikus valós szimmetrikus matrix diadikus előállítása. A fentiek alapján a tetszés szerinti a, b, c skalárelemekből felépített

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

matrix diadikus felbontása:

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{L}_1(\mathbf{A}) + \lambda_2 \mathbf{L}_2(\mathbf{A}).$$

Írjuk most az $\mathbf{A}$ matrix

$$|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökeit

$$\lambda_1 = s + \sqrt{d}, \qquad \lambda_2 = s - \sqrt{d}$$

alakban, ahol nyilván

$$s = \frac{a + c}{2}, \qquad d = \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{c - a}{2}\right)^2 + b^2.$$

A fentiek szerint továbbá:

$$L_1(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad L_2(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

tehát (ha $d \neq 0$):

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2\sqrt{d}} \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s - \sqrt{d} & 0 \\ 0 & s - \sqrt{d} \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{d}} \begin{bmatrix} \frac{a-c}{2} + \sqrt{d} & b \\ b & \frac{c-a}{2} + \sqrt{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{c-a}{2\sqrt{d}} & \frac{b}{\sqrt{d}} \\ \frac{b}{\sqrt{d}} & 1 + \frac{c-a}{2\sqrt{d}} \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$L_2(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1}{2\sqrt{d}} \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s + \sqrt{d} & 0 \\ 0 & s + \sqrt{d} \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{d}} \begin{bmatrix} \frac{c-a}{2} + \sqrt{d} & -b \\ -b & \frac{a-c}{2} + \sqrt{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{c-a}{2\sqrt{d}} & -\frac{b}{\sqrt{d}} \\ -\frac{b}{\sqrt{d}} & 1 - \frac{c-a}{2\sqrt{d}} \end{bmatrix}.$$

Nyilvánvaló, hogy mind az $L_1(\mathbf{A})$, mind az $L_2(\mathbf{A})$ Lagrange-matrix rangja $= 1$, tehát mindkét Lagrange-matrix egy-egy diáddal állítható elő. Ugyanis $|L_1(\mathbf{A})| = |L_2(\mathbf{A})| = 1 - \frac{(c-a)^2}{4d} - \frac{b^2}{d} = \frac{4d - (c-a)^2 - 4b^2}{4d} = 0$, és mindkét másodrendű matrixnak van nullától különböző eleme.

Az $L_1(\mathbf{A})$ és $L_2(\mathbf{A})$ matrixok felbontása egy-egy oszlop-, illetve sormatrix diadikus szorzatára a II. fejezet 2. § *b*)-ben tárgyalt módon is elvégezhető, ez esetben azonban — a későbbi alkalmazásokra való tekintettel is — célszerűbb egy másik utat követni. Minthogy nyilvánvalóan

$$\left(\frac{c-a}{2\sqrt{d}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{d}}\right)^2 \equiv \frac{\left(\frac{c-a}{2}\right) + b^2}{d} \equiv 1,$$

ennek az azonosságnak az alapján bevezethetjük a

$$\frac{c-a}{2\sqrt{d}} = \cos 2\varphi \quad \text{és} \quad \frac{b}{\sqrt{d}} = \sin 2\varphi$$

jelöléseket, e jelölések felhasználásával viszont $L_1(\mathbf{A})$ és $L_2(\mathbf{A})$ az alábbi alakra hozhatók:

$$L_1(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} & \frac{\sin 2\varphi}{2} \\ \frac{\sin 2\varphi}{2} & \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot [\sin \varphi, \quad \cos \varphi];$$

továbbá:

$$L_2(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} & -\frac{\sin 2\varphi}{2} \\ \frac{\sin 2\varphi}{2} & \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix} -$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{vmatrix} \cdot [\cos\varphi - \sin\varphi].$$

Ha — rövidebb írásmód végett — még bevezetjük a $\sigma = \sin\varphi$, $\gamma = \cos\varphi$ jelöléseket, az adott $\mathbf{A}$ matrix diadikus felbontása a következőképpen írható:

$$\mathbf{A} = (s + \sqrt{d}) \begin{bmatrix} \sigma \\ \gamma \end{bmatrix} [\sigma,\ \gamma] + (s - \sqrt{d}) \begin{bmatrix} \gamma \\ -\sigma \end{bmatrix} [\gamma,\ -\sigma]. \tag{4.36}$$

Ha a szimmetrikus matrixnak a (4.25) alatti kanonikus előállítását a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \tag{4.37}$$

$$= \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

ún. kvadratikus alakra alkalmazzuk, akkor a kvadratikus alaknak ortogonális transzformációval négyzetösszegbe átvitt alakját nyerjük:

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \cdot \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\mathbf{u}_{k1}\mathbf{u}_{k1}^* + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{u}_{k\alpha_k}^*)\, \mathbf{x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \{(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{x})^2 + \ldots + (\mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{x})^2\}. \tag{4.38}$$

β) A Lagrange-féle matrixpolinomok kiszámítása az adjungált matrix segítségével

Ha az adott $\mathbf{A}$ matrix rendszáma, n határozatlan,[13] akkor az $L_k(\mathbf{A})$ Lagrange-féle matrixpolinomok effektív kiszámítására gyakran a direkt behelyettesítésnél előnyösebb a következő eljárás, amely az $L_k(\mathbf{A})$ és az adj$\{\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}\}$ matrixok között fennálló összefüggésen alapul.

Ha az $\mathbf{A}$ matrix karakterisztikus polinomja $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s}$, minimál polinomja $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_s)$, akkor kimutatható, hogy $L_k(\mathbf{A})$ és adj$\{\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}\}$ között a következő összefüggés áll fenn:

$$L_k(\mathbf{A}) = \frac{\alpha_k}{D^{(\alpha_k)}(\lambda_k)} \Big\{ \text{adj}\,(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \Big\}_{\lambda = \lambda_k}^{(\alpha_k - 1)}. \tag{4.39}$$

[13] Azaz, ha nem egy konkrétan megadott rendszámú matrixról van szó, hanem — mint a következő példában tárgyalt kontinuáns matrix esetében — akárhányad rendű matrixra egyaránt érvényes eredményeket akarunk levezetni.

Abban a speciális esetben, amikor a k indexű sajátérték, λ_k egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, a k-adik Lagrange-féle matrixpolinom, $L_k(\mathbf{A})$ a következő alakot ölti:

$$L_k(\mathbf{A}) = \frac{1}{D'(\lambda_k)} \operatorname{adj} (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}). \tag{4.40}$$

Példa

Az $L_k(\mathbf{A})$ matrixpolinomoknak a fent ismertetett kiszámítását példaképpen bemutatjuk a — később fontos szerepet játszó —

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$(n-1)$-ed rendű kontinuáns matrixszal kapcsolatban.

Első teendő a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sajátértékek kiszámítása a

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \equiv D_{n-1}(\lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldása útján. Vezessük be evégből a

$$\lambda = 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{4.41}$$

jelölést. Miután ekkor $2 - \lambda = 2 - 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 2 \cos \vartheta$, tehát az új jelöléssel a karakterisztikus egyenlet:

$$D_{n-1}\left(4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \equiv \begin{vmatrix} -2 \cos \vartheta & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -2 \cos \vartheta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2 \cos \vartheta \end{vmatrix} = 0.$$

Minthogy azonban a determinánselméletből ismeretes, hogy a fenti egyenletben szereplő $D_{n-1}\left(4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)$ determináns éppen $(-1)^{n-1} \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}$-val egyenlő, tehát az új jelöléssel a karakterisztikus egyenlet

$$\frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} = 0$$

alakban is írható. A számláló, $\sin n\vartheta$ eltűnik a

$$\vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{n}, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \vartheta = \frac{(n-1)\pi}{n}$$

értékeknél, ezek közül (a nevező egyidejű eltűnése miatt) $\vartheta = 0$ nem jön tekintetbe, tehát ϑ-nak a többi értékét a $\lambda = 4\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ összefüggésbe helyettesítve, a sajátértékek a következők:

$$4.42) \qquad \lambda_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2n},\quad \lambda_2 = 4\sin^2\frac{2\pi}{2n},\ \ldots,\ \lambda_{n-1} = 4\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Ezek a λ értékek mind különbözők, tehát a $D_{n-1}(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenlet a matrixnak egyszersmind minimál egyenlete is.

Következő teendő az $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ matrixnak a meghatározása, vagyis $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ előjeles $(n-2)$-ed rendű A_{ij} minorainak a kiszámítása.

$D_{n-1}(\lambda)$ struktúrájából (a Laplace-féle kifejtési szabály alapján) könnyen felismerhető, hogy $i \leqq j$ esetén az i-edik sor és j-edik oszlop törlésével keletkező aldeterminánsnak

$$(-1)^{i+n-j} D_{i-1}(\lambda)\, D_{n-1-j}(\lambda)\text{-val}$$

egyenlő. Ebből az $A_{ij}(\lambda)$ előjeles aldeterminánsnak $(-1)^{i+j}$-nel való szorzással adódik, tehát a (4.41) figyelembevételével:

$$(4.43) \qquad A_{ij}(\lambda) = A_{ij}\left(4\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\sin i\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\dfrac{\sin(n-j)\vartheta}{\sin\vartheta}, & \text{ha } i \leqq j \\ (-1)^n \dfrac{\sin(n-i)\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\dfrac{\sin j\vartheta}{\sin\vartheta}, & \text{ha } i \leqq j. \end{cases}$$

Minthogy [lásd: (4.40)]

$$(4.44) \qquad L_k(\mathbf{A}) = \frac{1}{D'_{n-1}(\lambda_k)}\operatorname{adj}(\lambda_k\mathbf{E} - \mathbf{A}) =$$

$$= \frac{1}{D'_{n-1}(\lambda_k)}\begin{bmatrix} A_{11}(\lambda_k) & A_{21}(\lambda_k) & \ldots & A_{n-1,1}(\lambda_k) \\ A_{12}(\lambda_k) & A_{22}(\lambda_k) & \ldots & A_{n-1,2}(\lambda_k) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_{1,n-1}(\lambda_k) & A_{2,n-1}(\lambda_k) & \ldots & A_{n-1,n-1}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

továbbá a (4.43) egyenletben λ helyébe λ_k-t, azaz ϑ helyébe $\frac{k\pi}{n}$-et helyettesítve adódik, hogy

$$A_{ij}(\lambda_k) = A_{ij}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) = (-1)^n \frac{\sin\frac{ki\pi}{n}\sin\frac{k(n-j)\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}} =$$

$$= (-1)^{n-1+k}\frac{\sin\frac{ki\pi}{n}\sin\frac{kj\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}},$$

végül a l'Hospital-szabállyal nyerjük, hogy

$$D'_{n-1}(\lambda_k) = (-1)^{n-1+k} \frac{n}{2 \sin^2 \frac{k\pi}{n}},$$

tehát az $L_k(\mathbf{A})$ matrixpolinom a következő diádra redukálódik:

$$L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* = \frac{2}{n} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix} \left[\sin \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n}, \ldots, \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right]. \tag{4.45}$$

Ezek felhasználásával a kontinuáns matrix kanonikus előállítása nyilván a következő:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix} = \tag{4.46}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(4 \sin \frac{k\pi}{2n} \right) \frac{2}{n} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix} \left[\sin \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n}, \ldots, \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right].$$

Az

$$\mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix}, \tag{4.47a}$$

illetve

$$\mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n}}\left[\sin\frac{k\pi}{n},\ \sin\frac{2k\pi}{n},\ \ldots,\ \sin\frac{(n-1)k\pi}{n}\right] \tag{4.47b}$$

vektorok a $\mathbf{C}$ matrixnak $\lambda_k = 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$ sajátértékéhez tartozó jobb, illetve bal oldali sajátvektorai.

γ) Matrixok kanonikus előállítása hármas matrixszorzat alakban

A matrixok kanonikus előállításáról szóló fenti alaptétel még a következőképpen is fogalmazható:

20. tétel. Minden olyan $\mathbf{A}$ matrix, melynek minimál polinomja csupa egyszeres zérushellyel bír, hasonló[14] a sajátértékeiből alkotott diagonálmatrixhoz: $\mathbf{A} \sim \langle\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\rangle$; azaz létezik olyan nem szinguláris $\mathbf{U}$ matrix, melynek segítségével $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\langle\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\rangle\mathbf{U}^{-1}$ alakban írható. (A sajátértékek közül azok, amelyek a karakterisztikus egyenletnek többszörös gyökei, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sorozatban multiplicitásuknak megfelelően ismételve vannak.)

Bizonyítás: Jelöljük a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sajátértékekhez tartozó jobb, illetve bal oldali biortogonalizált sajátvektorokat $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, illetve $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_n^*$-gal. Ez esetben a (4.33) kanonikus előállítás így írható:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathbf{u}_k\cdot\mathbf{v}_k^* = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \mathbf{v}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_n^*\end{bmatrix}. \tag{4.48}$$

Azonban az

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \quad \text{és} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \mathbf{v}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_n^*\end{bmatrix}$$

matrixok a biortogonalitási relációk következtében egymásnak reciprokai, azaz $\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}$. Ebből viszont következik, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\langle\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\rangle\mathbf{U}^{-1}$.

Például a 4. § *b*) α) alatt bemutatott

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

matrix — az ott kiszámított sajátértékek és sajátvektorok felhasználásával — a következőképpen állítható elő hármas matrixszorzat alakban:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

[14] A matrixok „hasonlóságának" fogalmát illetőleg lásd az I. rész 1. § *c*) γ VI°-ot.

Ez esetben:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Valóban:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.)$$

Egy hermitikus $\mathbf{A}$ matrix *mindig* hasonló egy diagonálmatrixhoz, és a (4.48) reláció ez esetben az

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \rangle \bar{\mathbf{U}}^* \tag{4.49}$$

alakot ölti. Valós szimmetrikus matrix esetén pedig azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \rangle \mathbf{U}^*. \tag{4.50}$$

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

másodrendű kvadratikus valós szimmetrikus matrix az előző pontban bemutatott

$$\mathbf{A} = (s + \sqrt{d}) \begin{bmatrix} \sigma \\ \gamma \end{bmatrix} [\sigma, \gamma] + (s - \sqrt{d}) \begin{bmatrix} \gamma \\ -\sigma \end{bmatrix} [\gamma, -\sigma]$$

diadikus felbontás alapján

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma & \gamma \\ \gamma & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \sqrt{d} & 0 \\ 0 & s - \sqrt{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \gamma \\ \gamma & -\sigma \end{bmatrix}$$

vagy pedig

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \sqrt{d} & 0 \\ 0 & s + \sqrt{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

hármas matrixszorzat alakban írható.

δ) Ciklikus matrix analitikus függvényének kanonikus előállítása

Minthogy — amint arra már az 1. § *b*) *θ*)-ban rámutattunk — bármely n-ed rendű ciklikus matrix felírható az n-ed rendű primitív ciklikus matrixnak legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomjaként, először a primitív ciklikus matrixoknak, illetve azok analitikus függvényeinek kanonikus előállításával foglalkozunk.

Az n-ed rendű primitív ciklikus matrix karakterisztikus polinomja:

$$|\lambda \mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega}| \equiv D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^n - 1;$$

a $\lambda^n - 1 = 0$ karakterisztikus egyenletnek pedig nyilván n számú *különböző* gyöke van: ezek az ún. n-edik egységgyökök. A szokásos jelöléssel:

$$\lambda_k = \omega_k = e^{\frac{2k\pi j}{n}}; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.52}$$

Minthogy a karakterisztikus egyenlet gyökei jelen esetben mind különbözőek, ezért most a karakterisztikus polinom egyszersmind minimál polinom, tehát az $\mathbf{\Omega}$ n-ed rendű primitív ciklikus matrix tetszés szerinti analitikus függvénye

$$f(\mathbf{\Omega}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\omega_k)\, L_k(\mathbf{\Omega}),$$

ahol a 4. § *a) β)* szerint — figyelembe véve, hogy most $\Delta(\lambda) \equiv D(\lambda)$ —:

$$L_k(x) = \frac{D(x)}{D'(\omega_k)\,(x-\omega_k)} = \frac{x^n - 1}{n\,\omega_k^{n-1}\,(x-\omega_k)} = \frac{1}{n}\{1 + \bar{\omega}_k x + \bar{\omega}_k^2 x^2 + \ldots + \bar{\omega}_k^{n-1} x^{n-1}\}.$$

Tehát:

$$L_k(\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{n}\{\mathbf{E} + \bar{\omega}_k\mathbf{\Omega} + \bar{\omega}_k^2\mathbf{\Omega}^2 + \ldots + \bar{\omega}_k^{n-1}\mathbf{\Omega}^{n-1}\} = \tag{4.53}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} + \bar{\omega}_k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \bar{\omega}_k^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \bar{\omega}_k^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\omega}_k & \bar{\omega}_k^2 & \ldots & \bar{\omega}_k^{n-1} \\ \omega_k & 1 & \bar{\omega}_k & \ldots & \bar{\omega}_k^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_k^{n-1} & \omega_k^{n-2} & \omega_k^{n-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \ldots, \bar{\omega}_k^{n-1}].$$

Ily módon adódik, hogy

$$f(\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\omega_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \ldots, \bar{\omega}_k^{n-1}]. \tag{4.54}$$

Minthogy pedig bármely $\mathbf{C}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ n-ed rendű ciklikus matrix előállítható mint az $\mathbf{\Omega}$ primitív ciklikus matrixnak

$$c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{\Omega} + \ldots + c_{n-1}\mathbf{\Omega}^{n-1}$$

polinomja, tehát

$$\mathbf{C}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (c_0 + c_1\omega_k + \ldots + c_{n-1}\omega_k^{n-1}) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \ldots, \bar{\omega}_k^{n-1}], \tag{4.55}$$

tehát valamely $\mathbf{C}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ ciklikus matrix sajátértékei:

$$\lambda_k = c_0 + c_1\omega_k + \ldots + c_{n-1}\omega_k^{n-1}, \quad \omega_k = e^{\frac{2k\pi j}{n}}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1); \tag{4.56}$$

sajátvektorai pedig azonosak a megfelelő rendszámú primitív ciklikus matrix sajátvektoraival, tehát a jobb oldali sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{4.57}$$

a bal oldali sajátvektorok pedig:

$$\overline{\mathbf{u}_k^*} = \frac{1}{\sqrt{n}} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}]. \tag{4.58}$$

A sajátvektorok uniter-ortogonális rendszert alkotnak, ugyanis:

$$\overline{\mathbf{u}_k^*}\mathbf{u}_k = 1 \quad \text{és} \quad \overline{\mathbf{u}_k^*}\mathbf{u}_l = 0, \quad (k \neq l).$$

A fentiekből viszont azonnal következik, hogy a $\mathbf{C}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ ciklikus matrix tetszés szerinti analitikus függvényének kanonikus előállítása:

$$f(\mathbf{C}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(c_0 + c_1\omega_k + \ldots + c_{n-1}\omega_k^{n-1}) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_k, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}]. \tag{4.59}$$

Példa

Az alábbi feladatban egy 2×2 ciklikus szimmetrikus blokkból álló hipermatrixot diagonális alakra fogunk hozni úgy, hogy jobbról és balról bizonyos hipermatrixokkal szorzunk.

Legyen a diagonális alakra hozandó hipermatrix:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 11 & -4 & -4 & 6 & -3 & -3 \\ -4 & 11 & -4 & -3 & 6 & -3 \\ -4 & -4 & 11 & -3 & -3 & 6 \\ \hline 6 & -6 & -6 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 & 2 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & 6 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Első lépésként írjuk a blokkokat kanonikus alakban. A sajátértékeket és sajátvektorokat (4.56), (4.57) és (4.58) szerint számíthatjuk. Mivel a blokkok harmadrendűek, szükségünk lesz a harmadik egységgyökökre és néhány azokból alkotható kifejezés értékére. A harmadik egységgyökök:

$$1; \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j; \quad \overline{\varepsilon} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j.$$

Továbbá

$$1+\varepsilon+\bar{\varepsilon}=0; \qquad \varepsilon+\bar{\varepsilon}=-1; \qquad \varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}=1. \qquad \varepsilon^2=\bar{\varepsilon}; \qquad \bar{\varepsilon}^2=\varepsilon.$$

$\mathbf{C}_1$ sajátértékei:

$$\lambda_1=\frac{11}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=1;$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\frac{11}{3}-\frac{4}{3}\varepsilon-\frac{4}{3}\bar{\varepsilon}=\frac{11}{3}-\frac{4}{3}(\varepsilon+\bar{\varepsilon})=\frac{11}{3}+\frac{4}{3}=5.$$

$\mathbf{C}_2$ sajátértékei:

$$\mu_1=2-1-1=0; \qquad \mu_2=\mu_3=2+1=3.$$

$\mathbf{C}_3$ sajátértékei:

$$\nu_1=2-2-2=-2; \qquad \nu_2=\nu_3=2+2=4.$$

$\mathbf{C}_4$ sajátértékei:

$$\varrho_1=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=3; \qquad \varrho_2=\varrho_3=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1.$$

Az első blokk kanonikus alakja tehát:

$$\mathbf{C}_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[1,\ 1,\ 1]+5\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\bar{\varepsilon}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\varepsilon},\ \varepsilon]+5\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\\bar{\varepsilon}\\\varepsilon\end{bmatrix}[1,\ \varepsilon,\ \bar{\varepsilon}]=$$

$$=\mathbf{u}_1\bar{\mathbf{u}}_1^*+5\mathbf{u}_2\bar{\mathbf{u}}_2^*+\mathbf{u}_3\bar{\mathbf{u}}_3^*,$$

és hasonlóan írható fel a többi blokkoké is.

Második lépésként végezzük el a következő szorzást:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&0\\1&\bar{\varepsilon}&\varepsilon&0&0&0\\1&\varepsilon&\bar{\varepsilon}&0&0&0\\\hline0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&\bar{\varepsilon}&\varepsilon\\0&0&0&1&\varepsilon&\bar{\varepsilon}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\mathbf{C}_1&\mathbf{C}_2\\\mathbf{C}_3&\mathbf{C}_4\end{array}\right]\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&0\\1&\varepsilon&\bar{\varepsilon}&0&0&0\\1&\bar{\varepsilon}&\varepsilon&0&0&0\\\hline0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&\varepsilon&\bar{\varepsilon}\\0&0&0&1&\bar{\varepsilon}&\varepsilon\end{array}\right].$$

A hipermatrixok szorzási szabálya szerint a középső tényező minden egyes blokkja szorzódik balról a bal oldali, jobbról pedig a jobb oldali tényező bal felső blokkjával. A szorzat bal felső blokkját részletesen kiszámítjuk.

Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\bar{\varepsilon}&\varepsilon\\1&\varepsilon&\bar{\varepsilon}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{u}}_1^*\\\bar{\mathbf{u}}_2^*\\\bar{\mathbf{u}}_3^*\end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\bar{\varepsilon}\\1&\bar{\varepsilon}&\varepsilon\end{bmatrix}=[\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3],$$

ezért a szorzást célszerű kanonikus alakban végezni:

$$\begin{bmatrix}\bar{u}_1^*\\ \bar{u}_2^*\\ \bar{u}_3^*\end{bmatrix}(u_1\bar{u}_1^* + 5\,u_2\bar{u}_2^* + 5\,u_3\bar{u}_3^*)[u_1, u_2, u_3] =$$

$$= \begin{bmatrix}\bar{u}_1^*u_1\\ \bar{u}_2^*u_1\\ \bar{u}_3^*u_1\end{bmatrix}[\bar{u}_1^*u_1, \bar{u}_1^*u_2, \bar{u}_1^*u_3] + 5\begin{bmatrix}\bar{u}_1^*u_2\\ \bar{u}_2^*u_2\\ \bar{u}_3^*u_2\end{bmatrix}[\bar{u}_2^*u_1, \bar{u}_2^*u_2, \bar{u}_2^*u_3] +$$

$$+ 5\begin{bmatrix}\bar{u}_1^*u_3\\ \bar{u}_2^*u_3\\ \bar{u}_3^*u_3\end{bmatrix}[\bar{u}_3^*u_1, \bar{u}_3^*u_2, \bar{u}_3^*u_3] = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}[1,\ 0,\ 0] +$$

$$+ 5\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}[0,\ 1,\ 0] + 5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[0,\ 0,\ 1] =$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0\\0&5&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

A szorzásnál felhasználtuk a sajátvektorok ortogonalitását:

$$\bar{u}_k^*\,u_l = \delta_{kl}.$$

Eredményül tehát olyan blokkot nyertünk, melynek a főátlójában a sajátértékek állnak, a többi elem pedig zérus. A szorzás végeredménye tehát a következő:

1	0	0	0	0	0
0	5	0	0	3	0
0	0	5	0	0	3
−2	0	0	3	0	0
0	4	0	0	1	0
0	0	4	0	0	1

A harmadik lépés megint két szorzás, egyik balról, a másik jobbról:

1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1

1	0	0	0	0	0
0	5	0	0	3	0
0	0	5	0	0	3
−2	0	0	3	0	0
0	4	0	0	1	0
0	0	4	0	0	1

1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1

A bal oldali tényezővel szorozva:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ezt a jobb oldali tényezővel jobbról még szorozni kell; a műveletet az előbbihez hasonlóan végezhetjük el (a részletek kiírását mellőzzük), az eredmény:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

A nem zérus blokkokat **A**-val és **B**-vel jelöltük.

Negyedik lépés ezek kanonikus alakra hozatala lesz.

A sajátértékei: $\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ 2 & \alpha - 3 \end{vmatrix} = (\alpha - 1)(\alpha - 3) = 0,$

$$\alpha_1 = 1; \qquad \alpha_2 = 3.$$

A Lagrange-féle polinomok:

$$L_1(\alpha) = \frac{\alpha - 3}{1 - 3}; \quad L_2(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{3 - 1}.$$

$$L_1(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = -\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1, \ 0].$$

$$L_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[1, \ -1].$$

A kanonikus alak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1, \ 0] + 3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[1, \ -1].$$

B kanonikus alakját hasonlóan számoljuk:

$$\begin{vmatrix} \beta - 5 & -4 \\ -3 & \beta - 1 \end{vmatrix} = (\beta - 5)(\beta - 1) - 12 = \beta^2 - 6\beta - 7 = 0.$$

$$\beta_1 = 7; \qquad \beta_2 = -1.$$

$$L_1(\beta) = \frac{\beta + 1}{7 + 1}; \qquad L_2(\beta) = \frac{\beta - 7}{-1 - 7}$$

$$L_1(\mathbf{B}) = \frac{1}{8}(\mathbf{B} + \mathbf{E}) = \frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[3, \ 2].$$

$$L_2(\mathbf{B}) = -\frac{1}{8}(\mathbf{B} - 7\mathbf{E}) = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}[1, \ -2].$$

$$\mathbf{B} = \frac{7}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[3, \ 2] + \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}[1, \ -2].$$

Vezessük be **A** és **B** sajátvektoraira a következő jelöléseket:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1;\ \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\mathbf{a}_2;\quad [1,\ 0]=\mathbf{c}_1^*;\quad [1,\ -1]=\mathbf{c}_2^*;$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\mathbf{b}_1;\ -\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\mathbf{b}_2;\ \frac{1}{\sqrt{8}}[3,\ 2]=\mathbf{d}_1^*;\ \frac{1}{\sqrt{8}}[1,\ -2]=\mathbf{d}_2^*.$$

Az ötödik és egyben utolsó lépés a következő szorzás elvégzése lesz:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{c}_1^*\\ \mathbf{c}_2^* & 0 & 0\\ \hline 0 & \mathbf{d}_1^*\\ & \mathbf{d}_2^* & 0\\ \hline 0 & 0 & \mathbf{d}_1^*\\ & & \mathbf{d}_2^*\\ \hline\end{array}\quad\begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}\end{bmatrix}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & 0 & 0\\ \hline 0 & \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 & 0\\ \hline 0 & 0 & \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\\ \hline\end{array}.$$

Ez a művelet lényegileg semmiben sem különbözik a második lépésben elvégzett szorzástól. Eredményünk is egészen hasonló lesz: a középső tényező főátlójában álló, zérustól különböző blokkokat kell balról és jobbról sajátvektoraival szorozni. A művelet a bal felső blokk esetén:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^*\\ \mathbf{c}_2^*\end{bmatrix}\mathbf{A}[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[1,\ 0]+3\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}[1,\ -1]\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1,\ 0]+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0,\ 1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Vagyis oly blokkot nyertünk, melynek fődiagonálisában a sajátértékek vannak, a többi elem pedig zérus.

Tehát a keresett diagonálmatrix:

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ \hline\end{array}$$

ε) Szimmetrikus ciklikus matrix analitikus függvényének kanonikus előállítása Lagrange-féle matrixpolinomokkal kifejezett alakban

A ciklikus matrixoknak a műszaki alkalmazások szempontjából igen fontos csoportját alkotják a (valós vagy komplex elemekből álló) *szimmetrikus* ciklikus matrixok. Külön is felhívjuk az olvasó figyelmét arra a körülményre, hogy míg *általában* a csupa valós elemű matrixok közt a szimmetrikus matrixok („*valós szimmetrikus matrixok*"), a komplex (képzetes) elemeket is tartalmazó matrixok közt pedig a *hermitikus* matrixok mutatnak a kanonikus előállítás szempontjából különösen előnyös tulajdonságokat, addig az alábbiakban ismertetendő speciális összefüggések *komplex elemek esetén is* a szimmetrikus — tehát nem a hermitikus — ciklikus matrixokra alkalmazhatók.

Könnyen belátható, hogy valamely n-ed rendű szimmetrikus ciklikus matrix *páratlan* n esetén

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\left(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{\frac{n-1}{2}}, c_{\frac{n-1}{2}}, \ldots, c_2, c_1\right),$$

páros n esetén pedig

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\left(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1}, c_{\frac{n}{2}}, c_{\frac{n}{2}-1}, \ldots, c_2, c_1\right)$$

alakú. Például a *harmadrendű*, illetve a *negyedrendű* szimmetrikus ciklikus matrixok általános alakja:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_1 & c_0 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix},$$

ahol c_0 és c_1 egyaránt lehetnek valós vagy komplex számok.

A (4.56) képletből a szimmetrikus ciklikus matrixok sajátértékeire (az ún. Euler-féle összefüggések felhasználásával) *páratlan* n esetén a

$$\lambda_k = c_0 + 2c_1 \cos\frac{2k\pi}{n} + 2c_2 \cos 2\frac{2k\pi}{n} + \ldots + \tag{4.60}$$

$$+ 2c_{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{n-1}{2}\frac{2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

páros n esetén pedig a

$$\lambda_k = c_0 + 2c_1 \cos\frac{2k\pi}{n} + 2c_2 \cos 2\frac{2k\pi}{n} + \ldots + \tag{4.61}$$

$$+ 2c_{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{2k\pi}{n} + (-1)^k c_{\frac{n}{2}}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

formula adódik, tehát valamely n-ed rendű szimmetrikus matrixnak páratlan n esetén $\frac{n-1}{2}$, páros n esetén pedig $\frac{n}{2} - 1$ darab kettős sajátértéke van, ugyanis nyilvánvaló, hogy $\lambda_k = \lambda_{n-k}$. E kettős sajátértékek mindegyikéhez — a (4.57) képlet szerint —

két (egymástól lineárisan független) jobb oldali sajátvektor és — a (4.58) képlet szerint — két (ugyancsak egymástól lineárisan független) bal oldali sajátvektor tartozik. Következésképpen valamely szimmetrikus ciklikus matrix kanonikus alakja:

$$\mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{P}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_k \mathbf{P}_k, \quad \text{ha } n \text{ páratlan szám,} \tag{4.62}$$

illetve

$$\mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{P}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_k \mathbf{P}_k + \lambda_{\frac{n}{2}} \mathbf{P}_{\frac{n}{2}}, \quad \text{ha } n \text{ páros szám, ahol} \tag{4.63}$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^*,$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* + \mathbf{u}_{n-k} \mathbf{u}_{n-k}^*; \qquad k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 1, 2, \ldots, \dfrac{n}{2} - 1, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}_{\frac{n}{2}} = \mathbf{u}_{\frac{n}{2}} \mathbf{u}_{\frac{n}{2}}^* \quad \text{(csak páros } n \text{ esetén!)}$$

nem egyebek, mint a $\lambda_0, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_{\frac{n}{2}}$ sajátértékhez tartozó Lagrange-féle matrix-polinomok. A szorzások és az összeadások elvégzése után ezek a Lagrange-féle matrix-polinomok (amelyek mind n-ed rendű ciklikus matrixok) kiszámítására a következő képletek adódnak:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{n} \mathbf{C}(1, 1, \ldots, 1),$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{2}{n} \mathbf{C}\left(1, \cos\frac{2k\pi}{n}, \cos 2\frac{2k\pi}{n}, \ldots, \cos(n-1)\frac{2k\pi}{n}\right); \tag{4.64}$$

$$k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 1, 2, \ldots, \dfrac{n}{2} - 1, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{n} \mathbf{C}(1, \cos\pi, \cos 2\pi, \ldots, \cos(n-1)\pi) \quad \text{(csak páros } n\text{-nél!).}$$

A *szimmetrikus ciklikus* matrixok kanonikus előállítására a sajátvektorokkal történő (4.55) előállítás helyett célszerűbb a (4.62) és (4.63) képleteket alkalmazni, mert az utóbbi összefüggések csak $\frac{n+1}{2}$, illetve $\frac{n}{2}+1$ darab Lagrange-féle matrix-polinom kiszámítását teszi szükségessé, szemben a (4.55) képletben szereplő n darab diáddal, továbbá a $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ stb. matrixok elemei *mind valósak*, míg a sajátvektorokból képzett diádok elemei részben komplex számok.

Az $\mathbf{A}$ n-ed rendű szimmetrikus ciklikus matrix valamely algebrai vagy analitikus függvénye a sajátértékek és a $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ stb. Lagrange-féle matrixpolinomok segítségével — a (4.16) képlet szerint — a következőképpen fejezhető ki:

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_0)\,\mathbf{P}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} f(\lambda_k)\mathbf{P}_k, \tag{4.65}$$

ha n páratlan szám, továbbá

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_0)\,\mathbf{P}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(\lambda_k)\,\mathbf{P}_k + f\left(\lambda_{\frac{n}{2}}\right)\mathbf{P}_{\frac{n}{2}}, \tag{4.66}$$

ha n páros szám.

Példaképpen számítsuk ki egy (általános esetben *komplex* elemekből álló)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

harmadrendű szimmetrikus ciklikus matrix Lagrange-féle matrixpolinomjait előbb a (4.10) összefüggés felhasználásával, majd a (4.64) képletből. A sajátértékekre a (4.56) vagy a (4.60) képletből azt nyerjük, hogy

$$\lambda_0 = a_0 + 2a_1 \qquad \text{és} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = a_0 - a_1.$$

Tekintve, hogy a sajátértékek közt *kettős* sajátérték is előfordul, csak *két* Lagrange-féle alappolinomot és *két* Lagrange-féle matrixpolinomot tudunk felírni. (Mivel a sajátértékek indexe 0 és 1, a Lagrange-féle alappolinomokat $L_0(x)$-szel és $L_1(x)$-szel, a Lagrange-féle matrixpolinomokat pedig $L_0(\mathbf{A})$-val és $L_1(\mathbf{A})$-val fogjuk jelölni.)

$$L_0(x) = \frac{x - (a_0 - a_1)}{a_0 + 2a_1 - (a_0 - a_1)} = \frac{1}{3a_1}\{x - (a_0 - a_1)\},$$

$$L_1(x) = \frac{x - (a_0 + 2a_1)}{a_0 - a_1 - (a_0 + 2a_1)} = -\frac{1}{3a_1}\{x - (a_0 + 2a_1)\};$$

$$L_0(\mathbf{A}) = \frac{1}{3a_1}\{\mathbf{A} - (a_0 - a_1)\,\mathbf{E}_3\} = \frac{1}{3a_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{3a_1}\{\mathbf{A} - (a_0 + 2a_1)\,\mathbf{E}_3\} =$$

$$= \frac{1}{3a_1}\begin{bmatrix} 2a_1 & -a_1 & -a_1 \\ -a_1 & 2a_1 & -a_1 \\ -a_1 & -a_1 & 2a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}.$$

A (4.64) képletekből természetesen ugyanezeket a Lagrange-féle matrixpolinomokat nyerjük. Ugyanis

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{3}\,\mathbf{C}\,(1,\ 1,\ 1) = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{2}{3}\,\mathbf{C}\left(1,\ \cos\frac{2\pi}{3},\ \cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\,\mathbf{C}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\,\mathbf{C}\,(2,\ -1,\ -1) = \mathbf{Q}.$$

Számításainkból tehát az derül ki, hogy a harmadrendű ciklikus matrixok Lagrange-féle matrixpolinomjai éppen a már ismert (vö. a 63 oldallal) **P** és **Q** matrixok. Valamely harmadrendű szimmetrikus ciklikus matrix algebrai és analitikus függvényeinek a Lagrange-féle matrixpolinomok segítségével történő kanonikus előállítása tehát

$$f(\mathbf{A}) = f(a_0 + 2a_1)\,\mathbf{P} + f(a_0 - a_1)\,\mathbf{Q}$$

alakú.

ζ) Hipermatrixok függvényeinek szeminkanonikus és kanonikus előállítása

A közönséges skalár elemekből álló matrixok függvényeinek a sajátértékek és a Lagrange-féle matrixpolinomok, illetve a sajátértékek és a sajátvektorok segítségével történő kanonikus előállításának ismeretében úgyszólván magától felvetődik a kérdés, hogy lehetséges-e *hipermatrixok* függvényeinek előállítására a (4.16) illetve a (4.32) képletekkel analóg összefüggéseket levezetni? Erre a kérdésre a matrixszámítás elmélete a következő választ adja: abban az esetben, ha egy n blokksorból és n blokkoszlopból álló hipermatrix *valamennyi* blokkja *azonos* rendszámú, pl. m-ed rendű kvadratikus matrix, és mindegyik blokk kifejezhető *egy* és *ugyanazon* kvadratikus matrixnak valamely (kanonikus alakban előállítható) függvényeként, akkor az ($m \times n$-ed rendű közönséges kvadratikus matrixnak is tekinthető) hipermatrix függvényei mindig n-ed rendű kvadratikus matrixok függvényeire redukálhatók. (A legújabb matrixelméleti kutatások azt is kiderítették, hogy bizonyos esetekben olyan hipermatrixok függvényei is kifejezhetők a blokkokkal egyező rendszámú matrixok függvényeivel, amelyeknek a blokkjai nem felcserélhetők.)

Tegyük fel például, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_{ij}]$$

hipermatrix valamennyi blokkja az m-ed rendű **B** matrix kanonikus alakban előállítható függvénye, tehát $\mathbf{A}_{ij} = f_{ij}(\mathbf{B})$. Ha mármost ismerjük a **B** matrix sajátértékeit és sajátvektorait, akkor — feltéve, hogy a **B** matrix minimálegyenletének csupa egyszeres gyöke van — az **A** hipermatrix blokkjai nyilván

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} f_{ij}(\lambda_k)\,(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^{*} + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^{*}) \tag{4.67}$$

alakban állíthatók elő. (Lásd a (4.33) képletet a 118. oldalon.) Ebből következik, hogy az **A** hipermatrix

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} [f_{ij}(\lambda_k)] \times \cdot (\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^* + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*) \tag{4.68}$$

alakban írható. Ha mármost az $F(\mathbf{A})$ jelkép az **A** hipermatrix valamely algebrai vagy analitikus függvényét jelenti, a direkt szorzatok (1.53) szorzási szabályának és a sajátvektorok biortogonalitásának felhasználásával könnyen igazolható, hogy

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} F\{[f_{ij}(\lambda_k)]\} \times \cdot (\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^* + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*). \tag{4.69}$$

Ha viszont a **B** matrixnak, illetve a **B** matrix függvényeinek a Lagrange-féle matrixpolinomok segítségével történő kanonikus előállítása ismeretes (l. pl. a szimmetrikus ciklikus matrixoknak a Lagrange-féle matrixpolinomokból előállított kanonikus alakját), akkor az **A** hipermatrix blokkjait

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} f_{ij}(\lambda_k) L_k(\mathbf{B}) \tag{4.70}$$

alakban írhatjuk, és ekkor

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} [f_{ij}(\lambda_k)] \times \cdot L_k(\mathbf{B}). \tag{4.71}$$

A Lagrange-féle matrixpolinomok projektortulajdonságának és ortogonalitásának felhasználásával igazolható, hogy

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} F\{[f_{ij}(\lambda_k)]\} \times \cdot L_k(\mathbf{B}). \tag{4.72}$$

Az **A** hipermatrix (4.68), ill. (4.71) alakú előállítását, valamint az $F(\mathbf{A})$ függvény (4.69), ill. (4.72) képletét *„szemikanonikus"* („félkanonikus") előállításnak nevezhetjük.

A fenti összefüggések kiválóan alkalmasak az olyan hipermatrixok függvényeinek alacsonyabb rendszámú matrixok függvényeire való redukálására, amelyeknek valamennyi blokkja *azonos* rendszámú ciklikus matrix.

Tegyük fel, hogy az $n \times n$ blokkból álló

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \ldots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \ldots & \mathbf{C}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \ldots & \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}$$

hipermatrix valamennyi blokkja m-ed rendű ciklikus matrix. Ekkor a **C** hipermatrix

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^{m-1} [\lambda_{k,ij}] \times \cdot \mathbf{u}_k \bar{\mathbf{u}}_k^* \tag{4.73}$$

alakban írható, ahol $\lambda_{k,ij}$ a $\mathbf{C}_{ij}$ blokk k-indexű sajátértékét, $\mathbf{u}_k$ és $\bar{\mathbf{u}}_k^*$ pedig az m-ed rendű ciklikus matrixok *közös* sajátvektorai (lásd a 130. oldalt) közül a k-indexű jobb, ill. bal oldali sajátvektort jelenti. A $[\lambda_{k,ij}]$ jelkép a blokkok sajátértékeiből alkotott n-edrendű kvadratikus matrixok jelölésére szolgál.

A fenti jelölésekkel a **C** hipermatrix valamely $F(\mathbf{C})$ algebrai vagy analitikus függvénye

$$F(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^{m-1} F\{[\lambda_{k,ij}]\} \times \cdot \mathbf{u}_k \bar{\mathbf{u}}_k^* \tag{4.74}$$

alakban állítható elő, tehát az adott hipermatrix függvényei helyébe a *blokkok sajátértékeiből alkotott matrixok* függvényei lépnek.

Abban a speciális esetben, amikor a **C** hipermatrix valamennyi blokkja *szimmetrikus* ciklikus matrix, a (4.65) és (4.66) képletek felhasználásával azt nyerjük, hogy

$$F(\mathbf{C}) = F\{[\lambda_{0,ij}]\} \times \cdot \mathbf{P}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} F\{\lambda_{k,ij}]\} \times \cdot \mathbf{P}_k, \tag{4.75}$$

ha m páratlan szám, és

$$F(\mathbf{C}) = F\{[\lambda_{0,ij}]\} \times \cdot \mathbf{P}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} F\{[\lambda_{k,ij}]\} \times \cdot \mathbf{P}_k + F\left\{\left[\lambda_{\frac{m}{2},ij}\right]\right\} \times \cdot \mathbf{P}_{\frac{m}{2}}, \tag{4.76}$$

ha m páros szám.

Valamely hipermatrixnak, ill. valamely hipermatrix algebrai és analitikus függvényeinek *kanonikus* előállítása a szemikanonikus előállításból a „sajátérték-matrixok" (a blokkok sajátértékeiből alkotott $[f_{ij}(\lambda_k)]$, illetve $[\lambda_{k,ij}]$ matrixok) kanonikus alakjának (a közönséges matrixokra ismertetett eljárással történő) meghatározásával nyerhető.

A kanonikus előállítás szempontjából is különösen előnyös tulajdonságot mutatnak az ún. *direkt szorzatok*. Legyen az **A** n-ed rendű kvadratikus matrix kanonikus alakja

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i L_i(\mathbf{A}),$$

a **B** m-ed rendű kvadratikus matrix kanonikus alakja pedig legyen

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^* = \sum_{j=1}^{r} \beta_j L_j(\mathbf{B}).$$

(A sajátvektorokkal kifejezett kanonikus előállításban a többszörös gyökök annyiszor szerepelnek, amennyi a multiplicitásuk.) Ekkor az $\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B}$ direkt szorzat kanonikus előállítása:

$$\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i \beta_j)\, (\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*) \times \cdot (\mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^*) = \tag{4.77}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} (\alpha_i \beta_j)\, L_i(\mathbf{A}) \times \cdot L_j(\mathbf{B}).$$

A fenti képletből az $\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B}$ direkt szorzat tetszés szerinti algebrai vagy analitikus függvényének kanonikus előállítása közvetlenül nyerhető:

$$F(\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F(\alpha_i \beta_j)\, (\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*) \times \cdot (\mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^*) = \tag{4.78}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} F(\alpha_i \beta_j)\, L_i(\mathbf{A}) \times \cdot L_j(\mathbf{B}).$$

A hipermatrixok kanonikus előállításával kapcsolatos speciális kérdéseket illetőleg lásd Egerváry J. „Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában" c. munkáját. (A M. Tud. Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, 3 (1954), 31—47. oldal.)

MÁSODIK RÉSZ

A MATRIXSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

5. §. MATRIXOK NÉHÁNY ALKALMAZÁSA A HÁROMMÉRETŰ TÉR GEOMETRIÁJÁBAN

α) **Vektorműveletek matrix alakban**

A közönséges vektoralgebra a matrixalgebrába a következő megállapítások mellett illeszthető be. Valamely vektor, melynek derékszögű egységvektor-rendszerre vonatkozó koordinátái x, y, z, kifejezhető mind oszlopvektor, mind sorvektor alakban:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{v}^* = [x, y, z].$$

Oszlop-, valamint sorvektorok összeadása és skalárral való szorzása a matrixokra érvényes műveleti szabályok szerint történik.

Két vektor skalárszorzata matrixjelekkel:

$$\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 = [x_1, y_1, z_1] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{5.1}$$

Két vektor merőlegességének feltétele:

$$\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 = 0. \tag{5.2}$$

Egy vektor hosszának négyzete:

$$\mathbf{v}^* \mathbf{v} = [x, y, z] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Két vektor vektoriális szorzata a matrixaritmetika jeleivel csupán közvetve, egy ferdén szimmetrikus matrix elemeivel állítható elő. Ugyanis a $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektoriális szorzat

koordinátáit a következő ferdén szimmetrikus matrixnak (2,3); (3,1); (1,2) indexű elemei adják:

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & x_1z_2 - x_2z_1 \\ y_1x_2 - y_2x_1 & 0 & y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 & z_1y_2 - z_2y_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Ha azonban a vektoriális szorzat egyik tényezőjét — az (5.3)-ból látható minta szerint — ferdén szimmetrikus matrixszal fejezzük ki, akkor a szorzatvektort közönséges oszlop- (vagy sor-) vektor alakban nyerjük:

$$\begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2. \tag{5.4}$$

A fentiekből következik, hogy az „iterált" vektoriális szorzat, a $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3$ a matrixaritmetika jeleivel közvetlenül kifejezhető. Ha ugyanis a $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ szorzatot az (5.4) ferdén szimmetrikus matrixszal kifejezzük, és ennek szorzásánál az (5.3) egyenletet felhasználjuk, akkor adódik:

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & x_2y_1 - x_1y_2 & x_2z_1 - x_1y_2 \\ x_2y_1 - x_1y_2 & 0 & y_2z_1 - y_1z_2 \\ x_2z_1 - x_1z_2 & y_2z_1 - y_1z_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} =$$

$$= (\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2^*)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2^*\mathbf{v}_3).$$

Ily módon megkaptuk a vektoralgebrából ismert, ún. kifejtési tételt. Három vektor vegyes szorzatát a megfelelő sorrendben vett oszlop- vagy sorvektorokból alkotott matrix determinánsa adja.

Ha a háromméretű tér valamely $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ oszlopvektorát (balról) szorozzuk az

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ oszlopvektorokból álló

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

matrixszal, eredményül a következő $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ oszlopvektort nyerjük:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{v}' = \mathbf{U}\mathbf{v} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1x + \mathbf{u}_2y + \mathbf{u}_3z = \begin{bmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \\ c_1x + c_2y + c_3z \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{u}_1x + \mathbf{u}_2y + \mathbf{u}_3z$ alakból látható, hogy az $\mathbf{U}$ matrixszal való szorzás által nyert „kép"-vektor benne van az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ oszlopvektorok által generált térben.

Ha $\mathbf{U}$ harmadrangú, akkor oszlopvektorai lineárisan függetlenek, $|\mathbf{U}| \neq 0$. Ekkor $\mathbf{U}$ invertálható, ezért tetszőlegesen előírt $\mathbf{v}'$ képvektorhoz pontosan egy tárgyvektor tartozik, melyet a $\mathbf{v} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{v}'$ egyenlet határoz meg.

Ha $\mathbf{U}$ másodrangú, akkor oszlopvektorai közül kettő lineárisan független, és a harmadik ezekkel egy síkban van. Másodrangú $\mathbf{U}$ esetén tehát a tér összes $\mathbf{v}$ vektoraiból nyert $\mathbf{v}' = \mathbf{U}\mathbf{v}$ képvektorok egy síkban vannak, $\mathbf{U}$ oszlopvektorainak síkjában.

Végül, ha $\mathbf{U}$ elsőrangú, oszlopvektorai közül csupán egy lineárisan független, és a másik kettő ezzel egy egyenesbe esik. Elsőrangú $\mathbf{U}$ esetén eszerint a tér összes $\mathbf{v}$ vektoraiból keletkező $\mathbf{v}' = \mathbf{U}\mathbf{v}$ képvektorok egy egyenesbe, $\mathbf{U}$ oszlopvektorainak egyenesébe esnek.

Azokat a vektorokat, melyeknek képe: $\mathbf{v}' = \mathbf{U}\mathbf{v} = 0$, célszerűbb geometriailag $\mathbf{U}$ sorvektoraival jellemezni. Legyen $\mathbf{U}$ sorvektorokra bontott alakja $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* \\ \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c}^* \end{bmatrix}$, akkor az $\mathbf{U}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* \\ \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c}^* \end{bmatrix}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^*\mathbf{v} \\ \mathbf{b}^*\mathbf{v} \\ \mathbf{c}^*\mathbf{v} \end{bmatrix} = 0$ egyenletből közvetlenül kiolvasható, hogy az $\mathbf{U}\mathbf{v} = 0$ egyenlet fennállása esetén a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{U}$ matrix összes sorvektoraira merőleges.

β) Vetítő, tükröző és forgató matrixok

Legyen $\mathbf{P}$ egy harmadrendű szimmetrikus projektormatrix, amely tehát kielégíti a $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}$ és a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenleteket.

Ha $\mathbf{P}$ nem szinguláris, akkor van inverze, $\mathbf{P}^{-1}$, és ezzel a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenlet mindkét oldalát szorozva nyerjük, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{E}$. Tehát az egyetlen nem szinguláris projektor az egységmatrix.

Ki fogjuk mutatni, hogy szinguláris $\mathbf{P}$ esetén $\mathbf{P}\mathbf{v}$ a tér tetszőleges $\mathbf{v}$ helyzetvektorú pontjának egy síkra, illetve egy egyenesre való merőleges vetületét jelenti aszerint, amint $\mathbf{P}$ másod-, illetve elsőrangú. $\mathbf{P}$-nek ez a tulajdonsága indokolja a projektor elnevezést.

Az előzők szerint a $\mathbf{P}\mathbf{v}$ vektor másodrangú $\mathbf{P}$ esetén benne van a $\mathbf{P}$ oszlop- (és ezekkel közös sor-) vektorai által generált síkban, elsőrangú $\mathbf{P}$ esetén rajta van a $\mathbf{P}$ oszlopvektorait tartalmazó egyenesen.

Tehát csak azt kell kimutatni, hogy a $\mathbf{P}\mathbf{v}$ pontból a $\mathbf{v}$ pontba vivő $\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{P}$ mindegyik oszlopvektorára, vagyis $\mathbf{P}$ szimmetriája folytán $\mathbf{P}$ mindegyik sorvektorára merőleges. A sorvektorokra való merőlegesség feltétele pedig (5.2) szerint:

$$\mathbf{P}\{(\mathbf{E} - \mathbf{P})\mathbf{v}\} = \{\mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{P})\}\mathbf{v} = 0.$$

Ez pedig teljesítve van, mert $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$-ből $\mathbf{P} - \mathbf{P}^2 = 0$, azaz $\mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{P}) = 0$ következik.

Az eddigiekben a harmadrendű szimmetrikus projektorok jellemző tulajdonságait ismertettük definiáló egyenletük, $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ segélyével, de nem adtunk eljárást projektormatrixok tényleges megszerkesztésére. Az alábbiakban megadtunk és verifikálunk egy explicit képletet, melynek segítségével tetszőleges rendű és rangú projektorokat lehet megszerkeszteni.

Jelentse $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r]$ a lineárisan független $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ oszlopvektorok által alkotott matrixot. Ekkor a 6. tétel szerint $|\mathbf{U}^*\mathbf{U}| \neq 0$, tehát az $\mathbf{U}^*\mathbf{U}$ matrixnak van inverze és az ezzel szerkesztett

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^*$$

kvadratikus matrix n-ed rendű, r-ed rangú szimmetrikus projektor.

Bizonyítás: $\{\mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^*\}^2 = \mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^* =$

$$= \mathbf{U}(\mathbf{U}^*\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^*,$$

tehát a projektorokat definiáló egyenlet ki van elégítve.

Ha $\mathbf{U}$ egyetlen háromdimenziós oszlopmatrix, azaz $\mathbf{U} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, akkor az $\mathbf{u}$ egyenesére merőlegesen vetítő matrix:

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{u})^{-1}\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^*}{\mathbf{u}^*\mathbf{u}} = (a^2 + b^2 + c^2)^{-1}\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{bmatrix}.$$

Ha pedig $\mathbf{U}$ két lineárisan független oszlopvektorból áll, akkor az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok síkjára merőlegesen vetítő matrix:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]\begin{bmatrix} \mathbf{u}^*\mathbf{u} & \mathbf{u}^*\mathbf{v} \\ \mathbf{u}^*\mathbf{v} & \mathbf{v}^*\mathbf{v} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{v}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})\,\mathbf{u}\mathbf{u}^* + (\mathbf{u}^*\mathbf{u})\mathbf{v}\mathbf{v}^* - (\mathbf{u}\mathbf{v}^* + \mathbf{v}\mathbf{u}^*)\,\mathbf{u}^*\mathbf{v}}{(\mathbf{u}^*\mathbf{u})\,(\mathbf{v}^*\mathbf{v}) - (\mathbf{u}^*\mathbf{v})^2}.$$

A projektorok segítségével könnyen megszerkeszthető az a harmadrendű matrix is, mely a tér helyzetvektorait (pontjait) egy rögzített, az origón átmenő egyenesre tükrözi.

Ugyanis, ha a $\mathbf{v}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére vonatkozó tükörképe $\mathbf{v}'$, akkor $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = 2\mathbf{e}\mathbf{e}^*\mathbf{v}$, tehát a tükörkép:

$$\mathbf{v}' = 2\mathbf{e}\mathbf{e}^*\mathbf{v} - \mathbf{v} = (2\mathbf{e}\mathbf{e}^* - \mathbf{E})\,\mathbf{v}.$$

Az $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ egységvektor egyenesére tükröző $\mathbf{T}$ matrix tehát

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{e}\mathbf{e}^* - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 & 2c_1c_2 & 2c_1c_3 \\ 2c_2c_1 & c_2^2 - c_3^2 - c_1^2 & 2c_2c_3 \\ 2c_3c_1 & 2c_3c_2 & c_3^2 - c_1^2 - c_2^2 \end{bmatrix}.$$

Két egymás utáni tükrözés ugyanarra az egyenesre nyilván visszaviszi a helyzetvektort (pontot) eredeti helyzetébe. Ezt igazolja az ($\mathbf{e}^*\mathbf{e} = 1$ felhasználásával adódó)

$$\mathbf{T}^2 = (2\mathbf{e}\mathbf{e}^* - \mathbf{E})^2 = 4\mathbf{e}\mathbf{e}^*\,\mathbf{e}\mathbf{e}^* - 4\mathbf{e}\mathbf{e}^* + \mathbf{E} = \mathbf{E}$$

egyenlet. A tükröző matrixokat tehát az a tulajdonság jellemzi, hogy azok kielégítik a $\mathbf{T}^2 = \mathbf{E}$ egyenletet.

Az $\mathbf{e}$ egyenesre való tükrözés egyenértékű az $\mathbf{e}$ egyenes körüli fél fordulattal. Eszerint a tükröző matrix egyúttal speciális forgató matrix is.

Az általános forgató matrixoknak az a jellemző tulajdonsága, hogy az általuk való szorzás a tér összes helyzetvektorait (pontjait) előírt tengely körül előírt szöggel forgatja el. Kimutatható, hogy bármely $\mathbf{F}$ forgató (ortogonális) matrix a következő definiáló egyenletnek tesz eleget:

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{E}.$$

Pl. a fentebb ismertetett $\mathbf{T}$ tükröző matrixok szimmetrikusak ($\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$), tehát a $\mathbf{T}^2 = \mathbf{E}$ egyenlettel együtt kielégítik a $\mathbf{T}\mathbf{T}^* = \mathbf{E}$ egyenletet is.

Forgató (ortogonális) matrixokat könnyen lehet szerkeszteni ferdén szimmetrikus matrixokból. Valamely $\mathbf{Q}$ ferdén szimmetrikus matrixra ugyanis az jellemző, hogy transzponálás esetén csupán előjelet vált:

$$\mathbf{Q}^* = -\mathbf{Q}.$$

Ha mármost $\mathbf{E} + \mathbf{Q}$ nem szinguláris, akkor az abból képezett $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{E} - \mathbf{Q}}{\mathbf{E} + \mathbf{Q}}$ matrix kielégíti az

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{Q}}{\mathbf{E} + \mathbf{Q}}\left(\frac{\mathbf{E} - \mathbf{Q}}{\mathbf{E} + \mathbf{Q}}\right)^* = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{Q}}{\mathbf{E} + \mathbf{Q}} \cdot \frac{\mathbf{E} + \mathbf{Q}}{\mathbf{E} - \mathbf{Q}} = \mathbf{E}$$

egyenletet, az ily módon megszerkesztett $\mathbf{F}$ tehát forgató matrix.

Ha pl. $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix}$ (t = valós szám), akkor $\mathbf{E} + \mathbf{Q}$ invertálható,

$$(\mathbf{E} + \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (1 + t^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix},$$

és az ebből képezhető (síkbeli) forgató matrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix} (1 + t^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} & \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ \dfrac{-2t}{1 + t^2} & \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{bmatrix}.$$

Innen a $t = \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$ helyettesítéssel a síkban φ szöggel forgató matrixnak közismert

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ alakjához jutunk.}$$

Fenti eljárással térbeli forgató matrixok is szerkeszthetők, az így kapott alakból azonban a forgásszöget és a forgástengelyt nem lehet könnyen kiolvasni. Adott tengely körül adott szöggel forgató matrixokat a differenciálegyenletekkel foglalkozó 7. §-ban fogunk megismerni.

6. §. LINEÁRIS ALGEBRAI EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA A MATRIXSZÁMÍTÁS SEGITSÉGÉVEL

a) A matrixszámítás alkalmazása a lineáris algebrai egyenletrendszerek elméletében

α) Nem szinguláris matrixú inhomogén egyenletrendszer megoldása

Ha az

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

lineáris inhomogén egyenletrendszert az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}; \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{b} \tag{6.2}$$

kvadratikus, illetve oszlopmatrixok bevezetésével az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.3}$$

alakban írjuk, a megoldás az

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{6.4}$$

képlettel állítható elő, feltéve, hogy az egyenletrendszer **A** együttható-matrixa nem szinguláris, azaz ha $|\mathbf{A}| \neq 0$. Ez esetben a megoldás megszerkesztése az **A** együttható-matrix invertálását teszi szükségessé.

β) Nem szinguláris együttható-matrix invertálása

Egy nem szinguláris matrix invertálására többféle számítási módszer alkalmazható. Ezek közül a fontosabbakat az alábbiakban ismertetjük:

I°. Invertálás az aldeterminánsok segítségével. Ha az a_{ij} elemhez tartozó $(n-1)$-ed rendű (előjeles) aldeterminánst A_{ij}-vel jelöljük, akkor — miként azt az I. részben, az 1. § *c) β)* III°-ban részletesen kifejtettük —

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = |\mathbf{A}|^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

(Ezt a módszert numerikusan — a minorok kiszámításának nehézkessége miatt — csak alacsony rendszámú matrixoknál alkalmazzuk.)

II°. Invertálás a matrix faktorizációjának felhasználásával. Jelöljük azokat a permutáló matrixokat, melyek az **A** együttható-matrix diádjait háromszög-matrixokba rendezik [lásd az I. rész 1. § *a) β)* és 1. § *b) δ)*] $\mathbf{P}_1$-gyel, illetve $\mathbf{P}_2$-vel, és normírozzuk a diádokat úgy, hogy azoknak a főátlóba eső elemei 1-gyel legyenek egyenlők. Ekkor az adott **A** nem szinguláris matrix *öt* tényező szorzataként állítható elő a következő alakban:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 (\mathbf{E} + \Delta_1) \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle (\mathbf{E} + \nabla_2) \cdot \mathbf{P}_2. \tag{6.6}$$

E szorzat tényezői külön-külön mind könnyen invertálhatók:

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1^* \qquad \mathbf{P}_2^{-1} = \mathbf{P}_2^*, \tag{6.7}$$

továbbá

$$\langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle^{-1} = \left\langle \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots, \frac{1}{q_n} \right\rangle. \tag{6.8}$$

Az $(\mathbf{E} + \Delta_1)$ és $(\mathbf{E} + \nabla_2)$ tényezők inverzeit pedig az alábbi képletek szolgáltatják:

$$(\mathbf{E} + \Delta_1)^{-1} = \mathbf{E} - \Delta_1 + \Delta_1^2 - + \dots \pm \Delta_1^{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-\Delta_1)^\nu, \tag{6.9}$$

illetőleg

$$(\mathbf{E} + \nabla_2)^{-1} = \mathbf{E} - \nabla_2 + \nabla_2^2 - + \dots \pm \nabla_2^{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-\nabla_2)^\nu, \tag{6.10}$$

ugyanis minthogy $\Delta_1^n = 0$, tehát

$$(\mathbf{E} + \Delta_1)(\mathbf{E} - \Delta_1 + \Delta_1^2 - + \dots \pm \Delta_1^{n-1}) = \mathbf{E} \pm \Delta_2^n = \mathbf{E}.$$

Hasonlóképpen igazolható az $\mathbf{E} + \Delta_2$ inverzének képlete is. Tehát:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}_2^* \sum_{\nu=0}^{n-1} (-\nabla_2)^\nu \left\langle \frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n} \right\rangle \sum_{\nu=0}^{n-1} (-\Delta_1)^\nu \cdot P_1^*. \tag{6.11}$$

(E módszer akkor alkalmazható előnyösen, ha az invertálandó matrix diadikus előállítása már ismeretes.)

III°. Invertálás a matrix kanonikus előállításának felhasználásával. Ha az invertálandó **A** matrix kanonikus előállítása

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^* + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{v}_n^*, \tag{6.12}$$

akkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^*. \tag{6.13}$$

(E számítási eljárás nagyon egyszerű, de a kanonikus előállítás előzetes ismeretét tételezi fel.)

IV°. Invertálás rekurzív eljárással. E módszer ismertetésénél *célszerű a determináns rekurzív kiszámítását előrebocsátani:*

Legyen az adott $\mathbf{A}_n$ n-ed rendű matrix a következő módon négy blokkra particionálva:

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^* & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right], \tag{6.14}$$

és tegyük fel — a rekurzió elvének megfelelően —, hogy az $(n-1)$-ed rendű $\mathbf{A}_{n-1}$ sarokminor inverze $\mathbf{A}_{n-1}^{-1}$, valamint determinánsa $|\mathbf{A}_{n-1}|$ már ismert.

A kijelölt szorzás elvégzésével könnyen igazolható a következő azonosság:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & 0 \\ -\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^* & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{u} \\ 0 & a_{nn} - \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A}_{n-1}^{-1} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Ebből az azonosságból — ha mindkét oldalon a matrixok helyébe az (1.19) azonosság figyelembevételével azok determinánsait írjuk, és a kifejtési tételt alkalmazzuk — az alábbi összefüggést nyerhetjük:

$$|\mathbf{A}_n| = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^* & a_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{n-1}| \{a_{nn} - \mathbf{v}^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} \cdot \mathbf{u}\}. \tag{6.15}$$

Ez az azonosság mutatja, hogy az $\mathbf{A}_{n-1}$ sarok-minormatrix inverzének és determinánsának ismerete alapján az $\mathbf{A}_n$ matrix determinánsa aránylag egyszerűen kiszámítható.

Térjünk át most $\mathbf{A}_n$ invertálására, feltéve, hogy $\mathbf{A}_{n-1}^{-1}$ és $|\mathbf{A}_{n-1}|$ már ismertek, és ezekből a (6.15) képlet alkalmazásával $|\mathbf{A}_n|$ is ki van számítva.

A kijelölt szorzás elvégzésével egyszerűen igazolható, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1}^{-1} + \frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & -\frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{u} \\ -\frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{v}^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & \frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^* & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(A szorzat alsó jobb sarokeleme a (6.15) egyenlet felhasználásával bizonyul 1-gyel egyenlőnek.)

Ez az azonosság mutatja, hogy

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^* & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1}^{-1} + \frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & -\frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{u} \\ -\frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{v}^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & \frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|} \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

tehát az n-ed rendű $\mathbf{A}_n$ matrix invertálása $\mathbf{A}_{n-1}^{-1}$, $|\mathbf{A}_{n-1}|$ és (az $\mathbf{A}_{n-1}^{-1}$ és $|\mathbf{A}_{n-1}|$-ből már kiadódó) $|\mathbf{A}_n|$ ismerete alapján aránylag egyszerű műveletekkel végrehajtható. A (6.15) és (6.16) formulák alkalmazásánál célszerű először az $\mathbf{A}_{n-1}^{-1} \cdot \mathbf{u}$ és $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A}_{n-1}^{-1}$ szorzatokat (oszlop-, illetve sormatrix), azután ezek segítségével a (6.15) képletben szereplő $\mathbf{v}^*(\mathbf{A}_{n-1}^{-1} \cdot \mathbf{u})$ skalárszorzatot kiszámítani.

(Ez a módszer — ha az adott $\mathbf{A}$ matrix sarokminorai 0-tól különbözők — igen jól használható, mert lényegében csupán vektorok és skalárszorzatok effektív kiszámítását igényli.)

Példa. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrix inverzét a fentebb ismertetett módszerek mindegyikével.

1. A reciprokmatrix kiszámítása az *aldeterminánsok segítségével:*

$$|\mathbf{A}| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2.$$

Tehát:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. A reciprokmatrix kiszámítása *az* **A** *matrix faktorizációja segítségével:* Először az I. rész 2. § *b)* pontjában ismertetett módon előállítjuk az adott matrix egy diadikus felbontását. Minthogy nyilvánvalóan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} [0, \ 1, \ -1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

továbbá:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [2, \ 0, \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1, \ 0, \ 0],$$

tehát az adott **A** matrix diadikus felbontása:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} [0, \ 1, \ -1] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [2, \ 0, \ 1] + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1, \ 0, \ 0].$$

A fenti diadikus felbontás alapján írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet jobb oldalán látható hármas matrixszorzat bal oldali tényezője már az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ egységmatrixnak és az $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ alsó háromszög-matrixnak az összege; a hármas matrixszorzat jobb oldali tényezőjét pedig a következőképpen állíthatjuk elő a harmadrendű egységmatrix és egy felső háromszög-matrix összegének és egy permutáló matrixnak a szorzataként:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ily módon az adott **A** matrixot előállítottuk

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} + \Delta_1) \langle q_1, q_2, q_3 \rangle (\mathbf{E} + \nabla_2) \mathbf{P}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakban. (A fentebbi (6.6) képletben szereplő $\mathbf{P}_1$ permutáló matrix e példában azért nem szerepel, mert a diadikus felbontás által nyert hármas matrixszorzat bal oldali tényezőjét — mint láttuk — rögtön $\mathbf{E} + \Delta_1$ alakban nyertük, vagyis ez esetben $\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}$).

A fentebbiek alapján írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{P}_2^{-1} = \mathbf{P}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\langle q_1, q_2, q_3 \rangle^{-1} = \left\langle \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

továbbá:

$$(\mathbf{E} + \Delta_1)^{-1} = \mathbf{E} - \Delta_1 + \Delta_1^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$(\mathbf{E} + \nabla_2)^{-1} = \mathbf{E} - \nabla_2 + \nabla_2^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a (6.11) képlet szerint:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. A reciprokmatrix kiszámítása a *kanonikus előállítás alapján.* Az I. rész 4. § *b) α)* szerint:

$$\mathbf{A} = \lambda_1 L_1(\mathbf{A}) + \lambda_2 L_2(\mathbf{A}) =$$

$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} [-1, \quad 1, \quad -1] =$$

$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tehát (a II. rész 6. §-ban ismertetett (6.13) összefüggés alapján) írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{A}^{-1} = \lambda_1^{-1} L_1(\mathbf{A}) + \lambda_2^{-1} L_2(\mathbf{A}) =$$

$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. A reciprokmatrix kiszámítása *rekurzív módon.* A fentiek szerint nyilván:

$$\mathbf{A}_3 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 4 & -4 & 5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^* & a_{33} \end{bmatrix};$$

tehát: $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}^* = [4, \quad -4]$, $a_{33} = 5$.

Amint egyszerű számítással adódik:

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad |\mathbf{A}^2| = -2.$$

Tehát a (6.15) képlet szerint

$$|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}|_2 \{a_{33} - \mathbf{v}^* \mathbf{A}_2^{-1}\} \mathbf{u} =$$

$$= (-2) \left\{ 5 - [4, \quad -4] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = (-2) \left\{ 5 - [4, \quad -4] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= -2\{5 - 6\} = 2.$$

Ily módon:

$$\frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_3|} = \frac{-2}{2} = -1.$$

eszerint a (6.16) képlet alapján azt nyerjük, hogy:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}[4, \quad -4]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -(-1)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hline -(-1)[4, \quad -4]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ \hline -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

γ) Tetszőleges mátrixú homogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása

Az I. részben, a 2. §-ban már ismertettünk egy eljárást, amellyel egy

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{array}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 0,$$

tehát $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ általános alakú homogén lineáris algebrai egyenletrendszer a $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{x} = 0$, azaz részletesen:

$$\begin{array}{ll} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \ldots + v_{1r}x_r + \ldots + v_{1m}x_m = 0, & (v_{11} \neq 0) \\ v_{22}x_2 + \ldots + v_{2r}x_r + \ldots + v_{2m}x_m = 0, & (v_{22} \neq 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ v_{rr}x_r + \ldots + v_{rm}x_m = 0 & (v_{rr} \neq 0) \end{array}$$

alakra redukálható (r = az $\mathbf{A}$ együttható-mátrix rangja). Ez az eljárás számítástechnikai szempontból különféle hiányosságokat mutat, amennyiben az egyenletek átrendezését, az ismeretlenek átszámozását és az $a_{\beta 1, \gamma 1}$ stb.-vel való osztásokat teszi szükségessé, ami viszont nagyobb számú ismeretlen esetén a kivitel nehézkességére és könnyen elhibázható voltára vezet.

Indokolt tehát a következő kérdés felvetése: Létezik-e az adott **A** együtthatómatrixnak olyan diadikus előállítása, mely az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ rendszer megoldásához elégséges **V*** matrixot a numerikus számítás céljaira előnyös alakban szolgáltatja?

A következőkben egy olyan diadikus előállítást mutatunk be, mely a **V*** tényezőt különösen egyszerű háromszög-matrix alakban szolgáltatja.

A könnyebb áttekintés végett először egy *kvadratikus, nem szinguláris* **A** matrix diadikus felbontásával foglalkozunk. A matrix nem szinguláris voltából, vagyis az $|\mathbf{A}| \neq 0$ tulajdonságból következik, hogy az **A** matrix első oszlopában van legalább egy nullától különböző elem. Legyen például $a_{\beta_1 1} \neq 0$, akkor képezhetjük az alábbi különbséget:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\beta_1 1} & a_{\beta_1 2} & \dots & a_{\beta_1 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\beta_1 1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \left[1, \frac{a_{\beta_1 2}}{a_{\beta_1 1}}, \dots, \frac{a_{\beta_1 n}}{a_{\beta_1 1}}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} [1, \; b_{12}, \dots, b_{1n}] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

A „maradékmatrix"-ból a β_1-edik (csupa nullát tartalmazó) sor és az első (csupa nullát tartalmazó) oszlop elhagyásával egy nem szinguláris $(n-1)$-ed rendű $\mathbf{A}^{(2)}$ matrixot nyerünk, amelyből a fenti módon szintén levonható egy diád úgy, hogy a maradékmatrix első oszlopa és valamelyik sora csupa nullát tartalmaz:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(2)} - \begin{bmatrix} a_{12}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} \end{bmatrix} [1, \; b_{23}, \dots, b_{2n}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{13}^{(3)} & \dots & a_{1n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Ebből az $(n-1)$-ed rendű maradékmatrixból a csupa nullát tartalmazó oszlop és sor elhagyásával egy nem szinguláris $\mathbf{A}^{(3)}$ matrix állítható elő; látható tehát, hogy a diádok ilyen módon való leválasztása és a maradékmatrixokból a csupa nullát tartalmazó oszlop és sor elhagyása segítségével végül egy elsőrendű, azaz egyetlen skalár elemből álló $\mathbf{A}^{(n)} = 1$ matrixhoz jutunk. Az eljárás során nyert diádokból — az elha-

gyott csupa nullát tartalmazó sorokra és oszlopokra való tekintettel — az adott **A** matrix következő alakú felbontása írható fel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(n)} \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.18}$$

Itt a jobb oldali tényező minden átrendezés nélkül már háromszög-matrixnak adódott. (A bal oldali tényező elemeinek egy része ugyancsak nulla; az itt alkalmazott jelölésből ez nem tűnik ugyan ki, de — mint fentebb is hangsúlyoztuk — az egyenletrendszer megoldása végett csak a jobb oldali tényezőnek van jelentősége.)

Ezek után rátérünk egy szinguláris kvadratikus vagy egy nem kvadratikus matrixnak a gyakorlati számításra alkalmas felbontására. Minthogy az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 0, \text{ azaz } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$$

egyenlet **A** együttható-matrixának első oszlopában (tekintet nélkül arra, hogy **A** kvadratikus-e vagy nem) szükségképpen mindig van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta_1 1}$ elem (mert ha az **A** első oszlopában csupa zérus elem állana, akkor ez azt jelentené, hogy az egyenletrendszerben az x_1 ismeretlen elő sem fordul), tehát képezhető az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\beta_1 1} & a_{\beta_1 2} & \dots & a_{\beta_1 m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\beta_1 1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \left[1, \frac{a_{\beta_1 2}}{a_{\beta_1 1}}, \dots, \frac{a_{\beta_1 m}}{a_{\beta_1 1}}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} [1, b_{12}, \dots, b_{1m}] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1m}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2m}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nm}^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Most két eset lehetséges:

1'. A maradékmatrix második oszlopában van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta_2 2}^{(2)}$ elem. Ekkor a maradékmatrixból kivonjuk az

$$(6.20)\qquad \begin{bmatrix} a_{12}^{(2)} \\ a_{22}^{(2)} \\ \vdots \\ a^{\beta_2 2} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} \end{bmatrix} \left[0,\ 1,\ \frac{a_{\beta_2 3}^{(2)}}{a_{\beta_2 2}^{(2)}},\ \ldots,\ \frac{a_{\beta_2 m}^{(2)}}{a_{\beta_2 2}^{(2)}}\right] = \begin{bmatrix} a_{12}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} \end{bmatrix} [0,\ 1,\ b_{23},\ \ldots,\ b_{2m}]$$

diádot.

2′. A maradékmatrix második oszlopa csupa 0 elemből áll. Ekkor egy

$$\begin{bmatrix} ? \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix} [0,\ 0, \ldots,\ 0$$

alakú zérusdiádot választunk le, melyben a ?-lel jelölt elemek tetszőlegesek.

Az 1′-ben, illetőleg 2′-ben leírt műveleteket végrehajtva, m számú lépésben az adott $\mathbf{A}$ matrixnak következő alakú diadikus előállításához jutunk:

$$(6.21)\qquad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & b_{\nu_2, \nu_2+1} & \cdot & \ldots & b_{\nu_2 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & b_{\nu_3, \nu_2+1} & \ldots & b_{\nu_3 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \end{bmatrix}.$$

Tehát a keresett $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{x} = 0$ egyenletrendszer (az adott $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ egyenletrendszerrel ekvivalens redukált rendszer) a következő:

$$(6.22)\qquad \begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots & \ldots + b_{1m}x_m = 0 \\ x_{\nu_2} + b_{\nu_2, \nu_2+1}\, x_{\nu_2+1} + \ldots & \ldots + b_{\nu_2 m}x_m = 0 \\ x_{\nu_3} + b_{\nu_3, \nu_3+1}\, x_{\nu_3+1} + & \ldots + b_{\nu_2 m}x_m = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Az így nyert rendszer alakjából rögtön felismerhető, hogy abban $x_1, x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots$ kötött ismeretlenek, melyek a (6.22) egyenletekből a többi ismeretleneknek mint tetszés szerinti paramétereknek függvényei, rekurzíve, pusztán összeadás- és szorzásműveletekkel kiszámíthatók.

Nyilvánvaló, hogy a most ismertetett módszer bármely matrixra minden átrendezés és átszámozás nélkül alkalmazható.

Példa

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0.$$

Első generáló elem az első oszlop $a_{21} = 1$ eleme:

$$\mathbf{A} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [1,\ 0,\ -1,\ 2,\ 3] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)}.$$

Második generáló elem a második oszlop $a_{42}^{(2)} = -2$ eleme:

$$A^{(2)} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} [0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -2] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(3)}.$$

Harmadik oszlop minden eleme 0.

Negyedik lépésnél generáló elem a negyedik oszlop $a_{14}^{(3)} = 1$ eleme:

$$\mathbf{A}^{(3)} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -2] = 0.$$

Ezek felhasználásával $\mathbf{A}$ tényezőkre bontott alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & ? & 1 & ? \\ 1 & 0 & ? & 0 & ? \\ -1 & 2 & ? & -1 & ? \\ 0 & -2 & ? & 0 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(? = tetszőleges szám)

tehát x_1, x_2, x_4 kötött és x_3, x_5 szabad ismeretlenek, és a redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_2 + x_3 \quad - 2x_5 &= 0, \\ x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 2x_4 - 3x_5 = x_3 - 7x_5, \\ x_2 &= -x_3 + 2x_5, \\ x_4 &= 2x_5. \end{aligned}$$

Próba:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

δ) Tetszőleges mátrixú inhomogén egyenletrendszer megoldása

Bármely lineáris inhomogén algebrai egyenletrendszer általános megoldása előállítható mint egy homogén rendszernek egy speciális megoldása. Ha ugyanis a megoldandó inhomogén rendszer

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_m \end{aligned}$$

vagy mátrixjelöléssel:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

akkor ezt az inhomogén egyenletrendszert, illetve mátrixegyenletet a következő — mátrix alakban írt — homogén egyenletrendszerré alakíthatjuk át:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = 0. \tag{6.23}$$

Ennek a homogén egyenletrendszernek minden $\mathbf{x}$ megoldása az

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{m+1} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}x_{m+1} = 0 \tag{6.24}$$

homogén egyenletrendszernek egy olyan speciális megoldása, amelynél $x_{m+1} = -1$. Ahhoz pedig, hogy a (6.24) homogén rendszernek legyen olyan speciális megoldása, melyben $x_{m+1} = -1$, szükséges és elegendő, hogy x_{m+1} a (6.24) egyenletrendszer egyik „szabad ismeretlene" (tetszőleges paramétere) legyen, vagyis a b oszlopmátrixszal jobbról kiegészített $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ mátrixnak (6.21) előállításában szereplő háromszögmátrix legalsó eleme 0 legyen.

Az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ inhomogén lineáris egyenletrendszer tehát akkor és csak akkor kompatibilis, ha az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ mátrixnak (6.21) alakú felbontásában szereplő háromszögmátrixnak utolsó főátlós-eleme nulla. Ekkor a megfelelő homogén rendszer általános megoldásában az x_{m+1} tetszőleges paraméternek -1 értéket adva, nyerjük az inhomogén rendszer általános megoldását.

Ily módon egy inhomogén rendszer megoldását — gyakorlati számításra alkalmas formában — a megfelelő homogén rendszer megoldására vezettük vissza.

Példa

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Tehát jelen esetben:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Szerkesszük meg az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrix diadikus előállítását. A fentiek szerint:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [1, \ -1, \ 2, \ 0, \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_b^{(2)};$$

$$\mathbf{A}_b^{(2)} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [0, \ 1, \ 1, \ 2, \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_b^{(3)} = \mathbf{A}_b^{(4)},$$

miután a harmadik oszlop 0.

$$\mathbf{A}_b^{(4)} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} [0, \ 0, \ 0, \ 1, \ 2] = 0.$$

Eszerint $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ tényezőkre bontott alakja:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? & 0 & ? \\ 2 & 1 & ? & 0 & ? \\ 3 & 0 & ? & 2 & ? \\ 1 & -1 & ? & -3 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_5 \end{bmatrix}$ homogén rendszer x_5 ismeretlene tetszőleges paraméter, vagy a (6.24) rendszer kompatibilis. A redukált rendszer, $x_5 = -1$ helyettesítéssel is:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Innen az x_1, x_2, x_4 ismeretlenek mint az x_3 tetszőleges paraméter függvényei:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - 2x_3 + 1 = -3x_3 - 3, \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4 = -x_3 - 4, \\ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Próba:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3x_3 & -3 \\ -x_3 & -4 \\ x_3 & \\ & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ =5 \end{bmatrix}.$$

b) Műszaki alkalmazások

α) Szabályos Vierendeel-tartók és lánchidak számítása

I°. Lineáris inhomogén algebrai mátrixegyenlet megoldása az egyenlet abszolút tagjának „harmonikus analízisé"-vel. Már az I. részben, a 2. §-ban rámutattunk arra, hogy ha egy n ismeretlenű inhomogén lineáris egyenletrendszer együttható-mátrixának n számú lineárisan független sajátvektora van (tehát az együttható-mátrix nem szinguláris), akkor a mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak ismerete nagymértékben megkönnyíti az egyenletrendszer megoldását.

Ilyen tulajdonságúnak bizonyultak az I. részben, a 4. § *b) β)*-ban bemutatott

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

alakú kontinuáns mátrixok. Amint az idézett helyen (4.45) láttuk, az $(n-1)$-ed rendű $\mathbf{C}$ kontinuáns mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = 2\cos\frac{\pi}{n}, \quad \lambda_2 = 2\cos\frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \lambda_{n-1} = 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n},$$

és (jobb és bal oldali) normált sajátvektorai:

$$\mathbf{u}_1 = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{4\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{(n-1)2\pi}{n} \end{bmatrix}; \quad \dots;$$

$$\mathbf{u}_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{(n-1)(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix}.$$

Ezek a sajátértékek és sajátvektorok kielégítik a

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1; \qquad \mathbf{C}\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2; \ \ldots; \quad \mathbf{C}\mathbf{u}_{n-1} = \lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} \tag{6.25}$$

egyenleteket, valamint az

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u}_i^*\mathbf{u}_j = 0, \text{ ha } i \neq j \\ &\mathbf{u}_i^*\mathbf{u}_i = 1 \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

relációkat.

A (6.25), (6.26) egyenletekből következik, hogy bármely $n-1$ dimenziójú $\mathbf{b}$ vektor „kifejthető az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ sajátvektorok szerint", azaz előállítható

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} \tag{6.27}$$

alakban; a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ együtthatókat a

$$\beta_i = \mathbf{u}_i^*\mathbf{b} \tag{6.28}$$

explicit képlet szolgáltatja. A $\mathbf{b}$ vektornak ezt az előállítását nevezik a $\mathbf{b}$ vektor *„harmonikus analízisé"*-nek.

Legyen mármost megoldandó a

$$\varphi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.29}$$

inhomogén egyenletrendszer, ahol $\varphi(\mathbf{C})$ a $\mathbf{C}$ kontinuáns matrixnak nem szinguláris, egyébként tetszőleges függvénye (azaz $|\varphi(\mathbf{C})| \neq 0$, tehát a $\varphi(\lambda_i)$ számok egyike sem nulla).

Tekintsük először azt a speciális esetet, mikor az (6.29) megoldandó egyenlet „abszolút tagja" éppen az egyik sajátvektor: $\mathbf{b} = \mathbf{u}_i$. Minthogy az $\mathbf{u}_i$ sajátvektor kielégíti a

$$\varphi(\mathbf{C})\mathbf{u}_i = \varphi(\lambda_i)\mathbf{u}_i \tag{6.30}$$

egyenletet, tehát egyszersmind a

$$\varphi(\mathbf{C})\frac{\mathbf{u}_i}{\varphi(\lambda_i)} = \mathbf{u}_i \tag{6.31}$$

egyenletet is, következésképpen rögtön látható, hogy a

$$\varphi(\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{u}_i \tag{6.32}$$

egyenlet megoldása:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{u}_i}{\varphi(\lambda_i)}. \tag{6.33}$$

Ezzel a következő, alapvető felismerésre jutottunk: Ha az inhomogén egyenlet abszolút tagja egyik sajátvektor, akkor a megoldás ettől a sajátvektortól csupán egy skalártényezőben különbözik. A skalártényező pedig éppen a megfelelő sajátérték reciproka.

Legyen ezek után a megoldandó matrixegyenlet abszolút tagja egy tetszőleges $\mathbf{b}$ vektor. Ez a (6.27) szerint mindig felírható a

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$$

alakban. Ebből azonban a szuperpozició elve szerint rögtön következik, hogy a

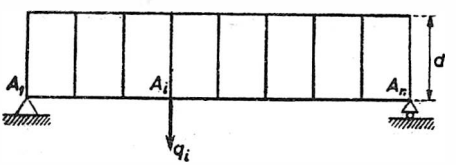
$$\varphi(\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{u}_i \tag{6.34}$$

egyenlet megoldása:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\varphi(\lambda_i)} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_i^* \mathbf{b}}{\varphi(\lambda_i)} \mathbf{u}. \tag{6.35}$$

A következőkben ilyen $\varphi(\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakú egyenletek alkalmazását mutatjuk be „szabályos" Vierendeel-tartók és lánchidak számítására.

II°. Szabályos Vierendeel-tartók vizsgálata. A *„szabályos" Vierendeel-tartó* egymás mellé sorakoztatott, kongruens téglalapokból álló, sarokmerev keretszerkezet (lásd az ábrát). Legyen



n — az oszlopok száma;
d — az oszlopok hossza;
J_d — az oszlopok keresztmetszetének inercianyomatéka;
$2n-2$ — az övrudak száma;
h — az övrudak hossza;
J_h — az övrudak keresztmetszetének inercianyomatéka;
F — az övrudak keresztmetszete;
E — a tartó anyagának rugalmassági modulusa.

Legyen továbbá a tartó az A_1 és A_n sarokpontokban megtámasztva, és hassanak a tartóra az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokban a $q_1, q_2, \ldots, q_n$ vertikális terhelőerők. Meghatározandók a tartóban fellépő alakváltozások és feszültségek.

Ha ismeretlenekként az egyes övrudakban keletkező $x_{12}, x_{23}, \ldots, x_{n-1,n}$ húzó-nyomó feszültségeket választjuk, akkor a tartó egyensúlyi egyenletei a következők:

$$\begin{cases} (2+\chi)\,x_{12} - x_{23} = r_{12} \\ -x_{12} + (2+\chi)\,x_{23} - x_{34} = r_{23} \\ -x_{23} + (2+\chi)\,x_{34} - x_{45} = r_{34} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_{n-2,n-1} + (2+\chi)\,x_{n-1,n} = r_{n-1,n} \end{cases} \tag{6.36}$$

Itt χ a tartó adataiból kiszámítható, dimenziótlan

$$\chi = \frac{12\,J_h}{J_d}\frac{d}{h}\left(1 + \frac{4J_d}{h^2F}\right) \tag{6.37}$$

számot, $r_{12}, r_{23}, \ldots, r_{n-2,\,n-1}$ pedig a terhelésekből adódó

$$r_{i,\,i+1} = (2i-1)\,r - \{(2i-q)q_1 + (2i-3)\,q_2 + \ldots + (2i-n-1)q_n\}\,3\left(\frac{d}{h}\right)^2 \frac{J_d}{J_h} \tag{6.38}$$

kifejezést jelenti, ahol r a bal oldali támaszreakció ($i = 1, 2, \ldots, n-2$).

Ha az ismeretleneket, illetve az abszolút tagokat az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{23} \\ \vdots \\ x_{n-1,n} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{23} \\ \vdots \\ r_{n-1,n} \end{bmatrix} \tag{6.39}$$

vektorba foglaljuk össze, akkor a Vierendeel-tartó egyensúlyi egyenletrendszere a következő matrixegyenletbe foglalható össze:

$$\varphi(\mathbf{C})\mathbf{x} = (\mathbf{C} + \chi\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{r}, \tag{6.40}$$

ahol $\mathbf{C}$ az $(n-1)$-ed rendű kontinuáns matrixot jelenti.

Legyen mármost az $\mathbf{r}$ terhelési vektornak az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ sajátvektorok szerinti kifejtése:

$$\mathbf{r} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1};\ \beta_i = \mathbf{u}_i^*\mathbf{r}, \tag{6.41}$$

akkor a (6.40) egyenlet megoldása (6.35) szerint:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\varphi(\lambda_i)}\,\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_i^*\mathbf{r}}{\lambda_i + \chi}\,\mathbf{u}_i, \tag{6.42}$$

ahol λ_i és $\mathbf{u}_i$ a (4.45)-ben megadott jelentéssel bírnak.

Megjegyezzük, hogy a Vierendeel-tartó (6.36) egyensúlyi egyenletei direkt úton, matrixok alkalmazása nélkül is aránylag könnyen megoldhatók; a matrixelméletet felhasználó megoldást csupán bevezető példaként mutattuk be. Ezzel szemben a lánchidak egyensúlyi egyenletrendszerének a következőkben bemutatandó megoldása, sőt az egyenletrendszer explicit felírása is csupán a matrixelmélet felhasználásával lesz lehetséges.

III°. Lánchidak vizsgálata. Egy lánchíd a következő alkatrészekből áll (l. a 163. oldalon levő ábrát):

1. A csuklók által összekapcsolt (első közelítésben), merev rudakból álló lánc, melynek végpontjai csuklósan vannak rögzítve.

2. A rugalmas gerenda (merevítő tartó), melynek végpontjai támasztva vannak.

3. A függélyes, merev függesztőrudak, melyek a láncot és a gerendát összekapcsolják.

Az alábbiakban az „egyenletes" lánchíddal foglalkozunk, melynek merevítő tartója egész hosszában egyenlő hajlítási szilárdságú és függesztőrúdjai egyenlő távolságra vannak egymástól (ekvidisztánsok).

Az alábbiakban a következő jelöléseket fogjuk használni:

n — a láncszemek száma;
l — két szomszédos függesztőrúd távolsága;
p — a lánc által hordozott önsúly (holtteher); mindegyik függesztőrúdra ugyanakkora holtteher hat;
q_i — az i-edik függesztőrúdra ható hasznos teher; a hasznos terhelést (élőteher) a függesztőrudak alsó végpontjaiban hatóknak tekintjük;
h — a lánc horizontális feszültségkomponense az önsúly folytán;

Δh — a lánc horizontális feszültségnövekedése a hasznos teher folytán;
(x_i, y_i) az i-edik lánccsukló koordinátái az önsúly hatása alatt;
$(x_i, 0)$ — az i-edik gerendacsukló koordinátái terheletlen állapotban;
v_i — az i-edik lánc- és gerendacsukló közös függélyes elmozdulása a hasznos terhelés folytán;
J — a gerenda keresztmetszetének inercianyomatéka;
E — a gerenda anyagának rugalmassági modulusa.

A lánchíd alapegyenletének felállítása céljából a műszaki szilárdságtannak a következő összefüggései használandók fel:

1′. Ha a lánc mindegyik rúdjának vízszintes vetülete l, a lánc horizontális feszültsége h és az (x_i, y_i) koordinátájú lánccsuklóra a p_i függélyes erő hat, akkor egyensúly esetén a következő összefüggések állanak fenn:

$$(6.43)\qquad \begin{cases} \dfrac{2y_1 - y_2}{l} = \dfrac{p_1}{h} \\ \dfrac{-y_1 + 2y_2 - y_3}{l} = \dfrac{p_2}{h} \\ \dfrac{-y_2 + 2y_3 - y_4}{l} = \dfrac{p_3}{h} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{-y_{n-3} + 2y_{n-2} - y_{n-1}}{l} = \dfrac{p_{n-2}}{h} \\ \dfrac{-y_{n-2} + 2y_{n-1}}{l} = \dfrac{p_{n-1}}{h} \end{cases}$$

Ha bevezetjük az

$$(6.44)\qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

oszlop-, illetve kvadratikus matrixokat [$\mathbf{C}$ az $(n-1)$-ed rendű kontinuáns matrix], a lánc fenti egyensúlyi egyenletei a következő matrixegyenletbe foglalhatók össze:

$$(6.45)\qquad \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{azaz } \frac{1}{l}\,\mathbf{C}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{h}\,\mathbf{p}.$$

2′. Ha az $L = nl$ hosszúságú, két végén támasztott gerendának kl abszcisszájú pontjában q_k függélyes irányú erő hat ($k = 1, 2, \dots, n-1$), akkor egyensúly esetén a q_k

terhelő erők és a kl abszcisszájú pontokban fellépő m_k hajlító feszültségek között a következő összefüggések állanak fenn:

$$(6.46)\qquad \begin{cases} \dfrac{2m_1 - m_2}{l} = q_1 \\ \dfrac{-m_1 + 2m_2 - m_3}{l} = q_2 \\ \dfrac{-m_2 + 2m_3 - m_4}{l} = q_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{-m_{n-3} + 2m_{n-2} - m_{n-1}}{l} = q_{n-2} \\ \dfrac{-m_{n-2} + 2m_{n-1}}{l} = q_{n-1} \end{cases}$$

Az

$$(6.47)\qquad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

jelölések bevezetésével a fenti egyenleteket a következő matrixegyenletbe foglalhatjuk össze:

$$(6.48)\qquad \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{azaz } \frac{1}{l}\,\mathbf{C}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{q}.$$

3′. Ha a gerenda keresztmetszetének inercianyomatéka J, anyagának rugalmassági modulusa E, akkor a kl abszcisszájú pontokban fellépő m_k hajlító feszültségek és ugyanezen pontoknak v_k függélyes lehajlásai között a következő összefüggések állanak fenn:

$$(6.49)\qquad \begin{cases} \dfrac{l^2}{6EJ}(4m_1 + m_2) = 2v_1 - v_2 \\ \dfrac{l^2}{6EJ}(m_1 + 4m_2 + m_3) = -v_1 + 2v_2 - v_3 \\ \dfrac{l^2}{6EJ}(m_2 + 4m_3 + m_4) = -v_2 + 2v_3 - v_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{l^2}{6EJ}(m_{n-3} + 4m_{n-2} + m_{n-1}) = -v_{n-3} + 2v_{n-2} - v_{n-1} \\ \dfrac{l^2}{6EJ}(m_{n-2} + 4m_{n-1}) = -v_{n-2} + 2v_{n-1} \end{cases}$$

Ezek az összefüggések a fentebb bevezetett matrixok, továbbá az $(n-1)$-ed rendű kvadratikus

$$\mathbf{K} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

matrix bevezetésével a következő matrixegyenlet alakjában is írhatók:

$$\frac{l^2}{6EJ}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{6.51}$$

azaz

$$\frac{l^2}{EJ}\mathbf{K}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{v}. \tag{6.52}$$

Abból a célból, hogy a gerenda **q** terhelési matrixa és **v** alakváltozási matrixa között fennálló explicit összefüggést megkapjuk, az **m** hajlító feszültségi matrixot a (6.48) és (6.52) összefüggésekből eliminálju k.

Minthogy $|\mathbf{K}| \neq 0$, a (6.52) egyenletből adódik, hogy: $\mathbf{m} = \frac{EJ}{l^2}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\cdot\mathbf{v}$, és ezt a (6.48) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{q}. \tag{6.53}$$

Ha a híd terheletlen, akkor a láncnak az a rendeltetése, hogy a gerendát lehetőleg feszültségmentes állapotban tartsa, vagyis megakadályozza a csupán két végpontjában megtámasztott gerendának az önsúly folytán bekövetkező lehajlását. Legyen a gerenda l hosszúságú darabjának súlya p, akkor (6.45) szerint a lánc egyensúlyi egyenlete a híd terheletlen állapotában:

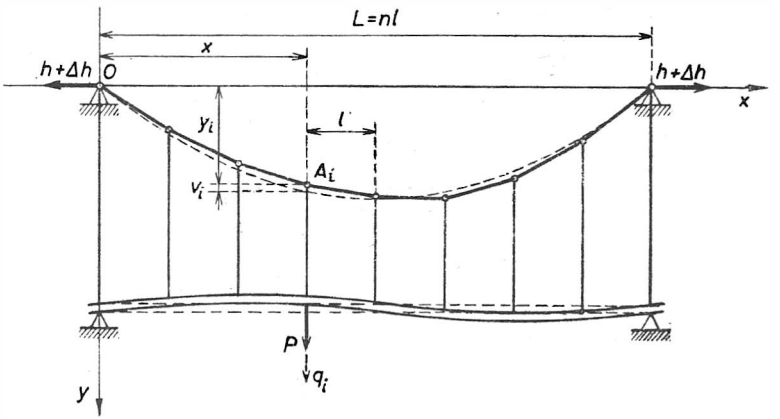
$$\frac{1}{l}\mathbf{C}\cdot\mathbf{y} = \frac{p}{h}\mathbf{e}, \text{ ahol } \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.54}$$

Tegyük fel mármost, hogy a hídra (a függesztőrudak alsó végpontjaiban ható $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ erők alakjában) a

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

oszlopmatrixba összefoglalható hasznos teher hat. Ennek a hasznos tehernek egy részét

a lánc, másik részét pedig a gerenda hordozza. Legyen a hasznos tehernek a lánc által hordozott része a $\tilde{\mathbf{q}}$ oszlopmatrixba összefoglalva, akkor a gerendára jutó teher nyilván: $\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}$.



A lánc deformációját tehát a terhelt állapotban a megnövekedett $p \cdot \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{q}}$ terhelés határozza meg, a lánccsuklók a

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

oszlopmatrixba összefoglalható függőleges irányú elmozdulásokat szenvedik, és horizontális feszültségeinek kezdeti h értéke H-ra változik. Ezek figyelembevételével (6.45) szerint a lánc egyensúlyi egyenlete a híd terhelt állapotában:

$$\frac{1}{l}\mathbf{C}(\mathbf{y} + \mathbf{v}) = \frac{1}{H}(p \cdot \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{q}}). \tag{6.55}$$

A lánccsuklók kezdeti ordinátái ($\mathbf{y}$ komponensei) a (6.54) és (6.55) egyenletekből eliminálhatók:

$$\frac{1}{l}\mathbf{C}\mathbf{v} = \frac{1}{H}\tilde{\mathbf{q}} - \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{H}\right)p \cdot \mathbf{e};$$

vagy:

$$\frac{H}{l}\mathbf{C}\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{q}} - \frac{H-h}{h}p \cdot \mathbf{e}. \tag{6.56}$$

A $\mathbf{q}$ hasznos tehernek a gerendára jutó része $(\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}})$ hatására a gerendacsuklók (a függesztőrudak merevsége folytán) a lánccsuklókkal azonos nagyságú függőleges elmozdulásokat szenvednek. Tehát a gerenda egyensúlyi egyenlete a híd terhelt állapotában:

$$\frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}. \tag{6.57}$$

A (6.56) és (6.57) egyenletekből $\tilde{\mathbf{q}}$-t eliminálva nyerjük a *lánchíd alapegyenletét*:

$$\left\{\frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}+\frac{H}{l}\mathbf{C}\right\}\mathbf{v}=\mathbf{q}-\frac{H-h}{h}p\cdot\mathbf{e}. \tag{6.58}$$

Ennek az egyenletnek ugyanaz a szerepe lánchidaknál, mint az ismert Melan-féle differenciálegyenletnek a kábel és függesztőlepel által hordozott függőhidaknál.

Ha az egyenletben előforduló összes skalárokat — tehát a terheletlen híd adatain kívül a terhelés folytán megnövekedett horizontális feszültséget is — ismertnek tekintjük, akkor a híd deformációjának számítása a (6.58) alapegyenletbe összefoglalt *lineáris inhomogén algebrai egyenletrendszer* megoldását teszi szükségessé. Ez a megoldás matrixalakban a következő:

$$\mathbf{v}=\left\{\frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}+\frac{H}{l}\mathbf{C}\right\}^{-1}\left\{\mathbf{q}-\frac{H-h}{h}p\cdot\mathbf{e}\right\}. \tag{6.59}$$

Azonban az inverz matrixnak — sőt magának az invertálandó matrixnak is — a kiszámítása 30—50 függesztőrúd esetén gyakorlatilag kivihetetlennek minősítendő; erre való tekintettel alapvető az a felismerés, hogy a (6.59)-ben szereplő $\mathbf{K}$ matrix a $\mathbf{C}$ matrixnak lineáris függvénye:

$$\mathbf{K}=\mathbf{E}-\frac{1}{6}\mathbf{C},$$

és így a megoldandó egyenletrendszer együttható-matrixa a $\mathbf{C}$-nek racionális függvényeként állítható elő:

$$\frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}+\frac{H}{l}\mathbf{C}=\frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\left(\mathbf{E}-\frac{1}{6}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{C}+\frac{H}{l}\mathbf{C},$$

továbbá, hogy a $\mathbf{C}$ kontinuáns matrix sajátértékei és sajátvektorai (az I. rész (4.42) és (4.47) képletek szerint) bármilyen rendszámú $\mathbf{C}$ esetén explicite ismertek.

Mindezek figyelembevételével ugyanis a megoldandó (6.58) egyenletrendszer

$$\varphi(\mathbf{C})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{r}$$

alakban írható, ahol:

$$\mathbf{r}=\mathbf{q}-\frac{H-h}{h}p\cdot\mathbf{e}$$

és

$$\varphi(x)=\frac{EJ}{l^3}\frac{x^2}{1-\frac{x}{6}}+\frac{H}{l}x. \tag{6.60}$$

A $\varphi(\mathbf{C})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{r}$ egyenletre viszont a (6.33) megoldási képlet már közvetlenül alkalmazható. Ha az $n-1$ függesztőrúddal bíró hídhoz tartozó $(n-1)$-ed rendű $\mathbf{C}$ kontinuáns matrixnak — a (4.42) és (4.47) képletekben — explicite megadott sajátértékeit és sajátvektorait ezúttal is

illetve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$-gyel,

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$-gyel

jelöljük, és az $\mathbf{r}$ oszlopmatrixnak az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ oszlopmatrixok szerinti kifejtése:

$$\mathbf{r} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$$

(ahol $\beta_i = \mathbf{u}_i^*\mathbf{r}$), akkor a (6.58) egyenletrendszer megoldását, vagyis a lánchíd elmozdulási matrixát a

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k}{\varphi(\lambda_k)}\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_k^*\mathbf{r}}{\dfrac{EJ}{l^3}\dfrac{\lambda_k^2}{1-\dfrac{\lambda_k}{6}} + \dfrac{H}{l}\lambda_k}\mathbf{u}_k \tag{6.61}$$

képlet szolgáltatja.

Ha a gerenda deformációját már kiszámítottuk, akkor annak felhasználásával a (6.52) képlet alapján a hajlító feszültségeket is közvetlenül kiszámíthatjuk.

β) Periodikus („stacionárius") elektromágneses folyamatok leírása a matrixszámítás segítségével

I°. Egy rezgőkör és több rezgőkörből álló rendszer periodikus folyamatait leíró skalár- és matrixképletek. Ismeretes, hogy ha egy (sorbakapcsolt) R ohmikus ellenállást, L öninduktivitású tekercset és C kapacitású kondenzátort tartalmazó áramkörben (az ohmikus ellenállással, induktív tekerccsel és a kondenzátorral sorbakapcsolt) periodikus elektromotoros erő működik, akkor a bekapcsoláskor fellépő tranziens áram elenyészése után az áramkörben folyó áram az időnek az elektromotoros erőével azonos periódusú függvénye. Az áramkörben folyó ezen, ún. „stacionárius" áram meghatározása pedig — ugyancsak közismert módon — úgy történik, hogy az áramkörben lejátszódó elektromágneses folyamatokat leíró

$$L\frac{d^2}{dt^2}i + R\frac{d}{dt}i + \frac{1}{C}i = j\omega\, e^{j\omega t}U_0 \tag{6.62}$$

differenciálegyenletbe az $i = e^{j\omega t}I_0$ módon előírt alakú függvényt helyettesítjük be, és ily módon ($j\omega e^{j\omega t}$-vel való osztás után) az I_0 ismeretlen amplitúdó meghatározására az alábbi *algebrai* egyenlet adódik (itt az áramkör elektromotoros erejét az $e^{j\omega t}U_0$ valós változójú komplex függvény valós része jelenti, és az elektromotoros erővel megegyező periódusú áramerősség pillanatnyi értékét ily módon az $e^{j\omega t}I_0$ komplex függvényének ugyancsak a valós része szolgáltatja):

$$j\omega L I_0 + RI_0 - j\frac{1}{\omega C}I_0 = U_0; \tag{6.63}$$

tehát:

$$I_0 = \frac{U_0}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_0}{Z}; \tag{6.64}$$

a Z komplex szám az áramkör ún. „komplex impedanciá"-ja.

Az elméleti elektrotechnika e közismert módszere a matrixszámítás segítségével általánosítható tetszés szerinti számú, induktíve és kapacitíve csatolt, rezgőkörből álló rendszerre. A 7. § *b) γ)*-ban felírjuk az n darab (külön-külön egy-egy sorbakapcsolt

ohmikus ellenállásból, induktív tekercsből és kondenzátorból álló) rezgőkör leírására szolgáló skalár differenciálegyenlet-rendszert, illetve matrix-differenciálegyenletet továbbá azon speciálisabb áramkör-rendszerek skalár differenciálegyenlet-rendszereit illetve matrix-differenciálegyenleteit, amelyek nem tartalmaznak kondenzátoroka vagy induktív tekercseket (lásd a (7.60), illetve (7.61) egyenleteket!). A 7. § *b) γ)* szerint az induktíve és kapacitíve csatolt áramkör-rendszer általános egyenlete azon esetben, ha mindegyik áramkörben ugyanazon periódusú periodikus elektromotoros erő van bekapcsolva, a következő:

$$\mathbf{L}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i} + \mathbf{R}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{K}\mathbf{i} = j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0 . \tag{6.65}$$

[Az **L**, **R** és **K** matrixok részletes kiírását illetőleg lásd a (7.56) és (7.57) egyenletet. Az egyenlet jobb oldalán az $\mathbf{u}(t) = e^{j\omega t}\mathbf{u}_0$ elektromotoros erő-oszlopmatrix t szerinti deriváltja áll a 7. § *b) γ)* (7.59) egyenletének megfelelőleg; jelen esetben ugyanis az egyes áramkörök elektromotoros erejét az $u_{10}e^{j\omega t}, u_{20}e^{j\omega t}, \ldots, u_{n0}e^{j\omega t}$ komplex függvények valós része írja le a t idő függvényeként, tehát az elektromotoros erők az

$$\begin{bmatrix} u_{10}e^{j\omega t} \\ u_{20}e^{j\omega t} \\ \vdots \\ u_{n0}e^{j\omega t} \end{bmatrix} = e^{j\omega t}\begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ u_{n0} \end{bmatrix} = e^{j\omega t}\mathbf{u}_0 \tag{6.66}$$

oszlopmatrixba foglalhatók össze. Az $u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{n0}$ jelképek általában komplex mennyiségeket jelentenek.]

Az áramkör-rendszerben — a tranziens áramok elenyészése után — folyó és az elektromotoros erőkkel azonos ω periódusú periodikus függvényekkel leírható áramokat az előbb vázolt skalármódszer mintájára az

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_{10}e^{j\omega t} \\ i_{20}e^{j\omega t} \\ \vdots \\ i_{n0}e^{j\omega t} \end{bmatrix} = e^{j\omega t}\begin{bmatrix} i_{10} \\ i_{20} \\ \vdots \\ i_{n0} \end{bmatrix} = e^{j\omega t}\mathbf{i}_0 \tag{6.67}$$

oszlopmatrix-függvény alakban kereshetjük. (Az $i_{10}, i_{20}, \ldots, i_{n0}$ — általában komplex — számok megadják az egyes áramkörökben folyó áramok legnagyobb értékeit és egymáshoz, illetve az elektromotoros erőkhöz képest fellépő fáziseltolásait. Az egyes áramkörökben folyó áramok tényleges értékét az $i_{10}e^{j\omega t}$ stb. komplex függvények valós értéke adja.)

Az $\mathbf{i} = e^{j\omega t}\mathbf{i}_0$ alakban előírt függvényt a fenti (6.65) egyenletbe helyettesítve, az ismeretlen $\mathbf{i}_0$ oszlopmatrix meghatározására az alábbi egyenlet adódik:

$$-\omega^2 e^{j\omega t}\mathbf{L}\mathbf{i}_0 + j\omega e^{j\omega t}\mathbf{R}\mathbf{i}_0 + e^{j\omega t}\mathbf{K}\mathbf{i}_0 = j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0;$$

ebből az egyenletből pedig mindkét oldalt $j\omega e^{j\omega t}$vel elosztva, a következő *algebrai* egyenlet adódik:

$$j\omega\mathbf{L}\mathbf{i}_0 + \mathbf{R}\mathbf{i}_0 - \frac{j}{\omega}\mathbf{K}\mathbf{i}_0 = \mathbf{u}_0 . \tag{6.68}$$

Az így nyert egyenlet viszont az ismeretlen $\mathbf{i}_0$ meghatározására az alábbi képletet szolgáltatja:

$$\mathbf{i}_0 = \left\{\mathbf{R} + j\left(\omega\mathbf{L} - \frac{1}{\omega}\mathbf{K}\right)\right\}^{-1}\mathbf{u}_0 . \tag{6.69}$$

II°. Két induktíve és kapacitíve csatolt rezgőkörben folyó periodikus („stacionárius") áramok meghatározása a matrixszámítás segítségével. Két induktíve és kapacitíve csatolt áramkör együttható-matrixai legyenek a következők:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{11}} & \frac{1}{C_{12}} \\ \frac{1}{C_{21}} & \frac{1}{C_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{D} \\ \frac{1}{D} & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}. \tag{6.70}$$

A két csatolt áramkörben folyó periodikus („stacionárius") áramokat a fentiek szerint az

$$\mathbf{i}_0(t) = e^{j\omega t}\mathbf{i}_0 = e^{j\omega t}\begin{bmatrix} i_{10} \\ i_{20} \end{bmatrix}$$

oszlopmatrix írja le, ahol az $\mathbf{i}_0$ meghatározására a (6.69) képletből adódó

$$\mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{10} \\ i_{20} \end{bmatrix} = \left\{\mathbf{R} + j\left(\omega\mathbf{L} - \frac{1}{\omega}\mathbf{K}\right)\right\}^{-1}\mathbf{u}_0 = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0 = \tag{6.71}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) & j\left(\omega M - \frac{1}{\omega D}\right) \\ j\left(\omega M - \frac{1}{\omega D}\right) & R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix}.$$

Az I. rész 1. § *d) β)* IV°. alapján nyilvánvaló, hogy:

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|} = \frac{\begin{bmatrix} R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) & -j\left(\omega M - \frac{1}{\omega D}\right) \\ -j\left(\omega M - \frac{1}{\omega D}\right) & R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \end{bmatrix}}{\left\{R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right\}\left\{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right\} + \left\{\omega M - \frac{1}{\omega D}\right\}^2}.$$

Ha — a rövidebb írásmód kedvéért — bevezetjük az

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = X_1, \qquad \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = X_2, \qquad \omega M - \frac{1}{\omega D} = X_k$$

jelöléseket, a keresett $\mathbf{i}_0$ oszlopmatrix a következőképpen írható:

$$\mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{10} \\ i_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + X_k^2} \begin{bmatrix} R_2 + jX_2 & -jX_k \\ -jX_k & R + jX_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix}.$$

Minthogy pedig $(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + X_k^2 = R_1R_2 - X_1X_2 + X_k^2 + j(R_1X_2 + R_2X_1)$, tehát nyilvánvaló, hogy:

$$\frac{1}{|\mathbf{Z}|} = \frac{1}{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) + X_k^2} = \frac{R_1R_2 - X_1X_2 + X_k^2 - j(R_1X_2 + R_2X_1)}{(R_1R_2 - X_1X_2 + X_k^2)^2 + (R_1X_2 + R_2X_1)^2}.$$

Ha még bevezetjük az $\frac{1}{|\mathbf{Z}|} = A - jB$ rövid jelképet, írhatjuk, hogy:

$$i_{10} = (A - jB)\{(R_2 + jX_2)u_{10} - jX_ku_{20}\},$$
$$i_{20} = (A - jB)\{-jX_ku_{10} + (R_1 + jX_1)u_{20}\}.$$

Például abban a speciális esetben, amidőn $L_1 = L_2 = L$, $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, tehát amikor a két csatolt áramkör teljesen egyforma, az i_{10} és i_{20} fenti képletei a következő alakot öltik:

$$i_{10} = \frac{R^2 - X^2 + X_k^2 - j2RX}{(R^2 - X^2 + X_k^2)^2 + 4R^2X^2}\{(R + jX)u_{10} - jXu_{20}\},$$

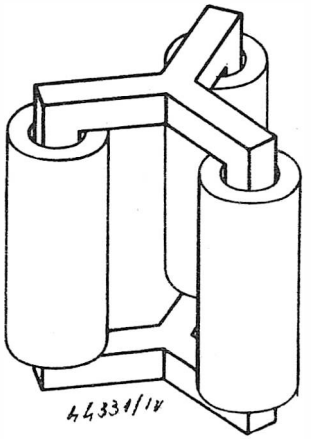
$$i_{20} = \frac{R^2 - X^2 + X_k^2 + j2RX}{(R^2 - X^2 + X_k^2)^2 + 4R^2X^2}\{-jX_ku_{10} + (R + jX)u_{20}\},$$

ahol nyilván $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

III°. Szimmetrikus háromfázisú transzformátor periodikus („stacionárius") áramainak meghatározása a matrixszámítás segítségével. Valamely szimmetrikus — tehát három egyforma primer tekercsből és három egyforma szekunder tekercsből az ábrán vázolt módon felépített — háromfázisú transzformátor jellemző elektromágneses állandóit a következőképpen jelölhetjük:

r_p — egy primer tekercs ohmikus ellenállása;
r_s — egy szekunder tekercs ohmikus ellenállása;
l_{p0} — egy primer tekercs öninduktivitása;
l_{s0} — egy szekunder tekercs öninduktivitása;
l_{p1} — bármely két primer tekercs közötti kölcsönös induktivitás;
l_{s1} — bármely két szekunder tekercs közötti kölcsönös induktivitás;
m_0 — az ugyanazon oszlopon levő primer és szekunder tekercs közötti kölcsönös induktivitás;
m_1 — két különböző oszlopon levő primer és szekunder tekercs közötti kölcsönös induktivitás.

A II. rész 7. § *b) γ)* I°-ban foglaltak szerint a szimmetrikus háromfázisú transzformátorban lejátszódó elektromágneses folyamatokat leíró differenciálegyenletrendszer az



$$\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{u}(t) \tag{6.72}$$

matrixegyenletben foglalható össze; itt nyilván

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} i_{p1}(t) \\ i_{p2}(t) \\ i_{p3}(t) \\ i_{s1}(t) \\ i_{s2}(t) \\ i_{s3}(t) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{p1}(t) \\ u_{p2}(t) \\ u_{p3}(t) \\ u_{s1}(t) \\ u_{s2}(t) \\ u_{s3}(t) \end{bmatrix}, \tag{6.73}$$

ahol $i_{p1}(t)$ $i_{p2}(t)$, $i_{p3}(t)$, illetőleg $u_{p1}(t)$, $u_{p2}(t)$, $u_{p3}(t)$ a primer tekercsek áramait, illetőleg elektromotoros erőit, továbbá $i_{s1}(t)$, $i_{s2}(t)$, $i_{s3}(t)$, illetőleg $u_{s1}(t)$, $u_{s2}(t)$, $u_{s3}(t)$ a szekunder tekercsek áramait, illetőleg elektromotoros erőit jelentik. Ha valamennyi tekercs elektromotoros ereje a t időnek ugyanazon periódusú periodikus függvénye, az u_{p10}, u_{p20}, u_{p30}, u_{s10}, u_{s20}, u_{s30} komplex mennyiségek bevezetésével $\mathbf{u}(t)$ oszlopmatrix nyilván az alábbi módon írható:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{p10}e^{j\omega t} \\ u_{p20}e^{j\omega t} \\ u_{p30}e^{j\omega t} \\ u_{s10}e^{j\omega t} \\ u_{s20}e^{j\omega t} \\ u_{s30}e^{j\omega t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{p10} \\ u_{p20} \\ u_{p30} \\ u_{s10} \\ u_{s20} \\ u_{s30} \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}. \tag{6.74}$$

Ez esetben az $\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{u}e^{j\omega t}$ egyenlet megoldásaként adódó $\mathbf{i}(t)$ oszlopmatrix elemei a t valós változó komplex függvényeiként adódnak; ha az elektromotoros erők tényleges értékének az $u_{p10}e^{j\omega t}$ stb. komplex mennyiségek valós részét tekintjük, az áramerősség tényleges értékét az $i_{p1}(t)$ stb. komplex függvényeknek ugyancsak a valós része szolgáltatja.

Az $\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{u}(t)$ matrixegyenlet $\mathbf{L}$ és $\mathbf{R}$ együttható matrixai — a II. rész, 7. § *b) β)* I°. alapján — a fent bevezetett jelölésekkel a következők:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} & l_{p1} & m_0 & m_1 & m_1 \\ l_{p1} & l_{p0} & l_{p1} & m_1 & m_0 & m_1 \\ l_{p1} & l_{p1} & l_{p0} & m_1 & m_1 & m_0 \\ m_0 & m_1 & m_1 & l_{s0} & l_{s1} & l_{s1} \\ m_1 & m_0 & m_1 & l_{s1} & l_{s0} & l_{s1} \\ m_1 & m_1 & m_0 & l_{s1} & l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix} \tag{6.75}$$

és

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_s \end{bmatrix}. \tag{6.76}$$

Azonnal felismerhető, hogy *mind az* $\mathbf{L}$, *mind az* $\mathbf{R}$ *matrix négy-négy ciklikus blokkmatrixra particionálható.* Az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{R}$ együttható-matrixoknak e ciklikus blokkokból álló hipermatrix alakú előállítása majd lehetővé teszi a periodikus áramok meghatározásához szükséges reciprokmatrix egyszerű kiszámítását.

Vezessük be tehát az

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p0} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p1} & l_{p0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s0} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_1 \\ m_1 & m_0 & m_1 \\ m_1 & m_1 & m_0 \end{bmatrix} \tag{6.77}$$

szimmetrikus ciklikus matrixokat; ezek felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}_s \end{bmatrix}. \tag{6.78}$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p \cdot \mathbf{E} & 0 \\ 0 & r_s \cdot \mathbf{E} \end{bmatrix} \tag{6.79}$$

(ahol $\mathbf{E}$ a harmadrendű egységmatrixot jelenti).

Ha még bevezetjük az

$$\mathbf{i}_p = \begin{bmatrix} i_{p1} \\ i_{p2} \\ i_{p3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_s = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} u_{p1} \\ u_{p2} \\ u_{p3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix} \tag{6.80}$$

jelöléseket, akkor nyilván

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix}, \tag{6.81}$$

és ha az elektromotoros erők t-nek ugyanazon periódusú periodikus függvényei:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p0} \\ \mathbf{u}_{s0} \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{u}_{p0} = \begin{bmatrix} u_{p10} \\ u_{p20} \\ u_{p30} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_{s0} = \begin{bmatrix} u_{s10} \\ u_{s20} \\ u_{s30} \end{bmatrix}. \tag{6.82}$$

Ha mármost az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_p & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}_s \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_p \cdot \mathbf{E} & 0 \\ 0 & r_s \cdot \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p0} \\ \mathbf{u}_{s0} \end{bmatrix} e^{i\omega t} \tag{6.83}$$

differenciálegyenletnek az elektromotoros erőkkel megegyező periódusú periodikus megoldását keressük, a keresett megoldás nyilván

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} i_{p10} \\ i_{p20} \\ i_{p30} \\ i_{s10} \\ i_{s20} \\ i_{s30} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \tag{6.84}$$

alakú; az $\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} e^{j\omega t}$ alakban előírt megoldást a differenciálegyenletbe helyettesítve, azt nyerjük, hogy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} r_p \cdot \mathbf{E} & 0 \\ 0 & r_s \cdot \mathbf{E} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}_s \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p0} \\ \mathbf{u}_{s0} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{p0} \\ \mathbf{u}_{s0} \end{bmatrix}. \tag{6.85}$$

Felhasználva a harmadrendű szimmetrikus ciklikus matrixokra az I. rész, 1. § *d) δ)* II°-ban levezetett összefüggéseket, írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} r_p \cdot \mathbf{E} + j\omega \mathbf{L}_p & j\omega \mathbf{M} \\ j\omega \mathbf{M} & r_s \cdot \mathbf{E} + j\omega \mathbf{L}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \mathbf{P} + y_p \mathbf{Q} & x_k \mathbf{P} + y_k \mathbf{Q}, \\ x_k \mathbf{P} + y_k \mathbf{Q} & x_s \mathbf{P} + y_s \mathbf{Q} \end{bmatrix}. \tag{6.86}$$

ahol az idézett § szerint:

$$\begin{aligned} x_p &= r_p + j\omega\,(l_{p0} + 2l_{p1}); & y_p &= r_p + j\omega\,(l_{p0} - l_{p1}), \\ x_s &= r_s + j\omega\,(l_{s0} + 2l_{s1}); & y_s &= r_s + j\omega\,(l_{s0} - l_{s1}), \\ x_k &= j\omega\,(m_0 + 2m_1); & y_k &= j\omega(m_0 - m_1). \end{aligned}$$

Az idézett paragrafusban levezetett összefüggések felhasználásával azonnal felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_s}{x_p x_s - x_k^2}\mathbf{P} + \dfrac{y_s}{y_p y_s - y_k^2}\mathbf{Q} & -\dfrac{x_k}{x_p x_s - x_k^2}\mathbf{P} - \dfrac{y_k}{y_p y_s - y_k^2}\mathbf{Q} \\ -\dfrac{x_k}{x_p x_s - x_k^2}\mathbf{P} - \dfrac{y_k}{y_p y_s - y_k^2}\mathbf{Q} & \dfrac{x_p}{x_p x_s - x_k^2}\mathbf{P} + \dfrac{y_p}{y_p y_s - y_k^2}\mathbf{Q} \end{bmatrix}. \tag{6.87}$$

Ez az összefüggés a $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ hipermatrixok bevezetésével még így írható:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{-1} = {} & \frac{1}{x_p x_s - x_k^2} \begin{bmatrix} x_s \mathbf{E} & -x_k \mathbf{E} \\ -x_k \mathbf{E} & x_p \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{P} \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{y_p y_s - y_k^2} \begin{bmatrix} y_s \mathbf{E} & -y_k \mathbf{E} \\ -y_k \mathbf{E} & y_p \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.88}$$

Tehát írhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_p x_s - x_k^2} \begin{bmatrix} x_s \mathbf{E} & -x_k \mathbf{E} \\ -x_k \mathbf{E} & x_p \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_{p0} \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_{s0} \end{bmatrix} + \frac{1}{y_p y_s - y_k^2} \begin{bmatrix} y_s \mathbf{E} & -y_k \mathbf{E} \\ -y_k \mathbf{E} & y_p \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_{p0} \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_{s0} \end{bmatrix} \cdot \tag{6.89}$$

Abban a speciális esetben, amikor mind a primer, mind a szekunder tekercsek elektromotoros erői egymáshoz képest $\frac{2\pi}{3}$-mal vannak fázisban eltolva, az ún. „harmadik egységgyökök" $(1, \varepsilon, \bar{\varepsilon})$ ismert és a II. rész, 7. § *b) δ)*-ban is kihasznált tulajdonságai alapján írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{u}_{p0} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_{s0} = c \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

(ahol c valamely komplex állandót jelent);
továbbá:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_{p0} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = 0, \text{ és hasonlóképpen } \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_{s0} = 0,$$

valamint

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_{p0} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \text{ és hasonlóképp } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_{s0} = c \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix},$$

tehát ez esetben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{p10} \\ i_{p20} \\ i_{p30} \\ i_{s10} \\ i_{s20} \\ i_{s30} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_p y_s - y_k^2} \begin{bmatrix} y_s \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} - y_k c \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \\ -y_k \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} + y_p c \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \tag{6.90}$$

c) Valamely egyenletrendszer megoldásának módosulása néhány együttható megváltozása vagy egyes ismeretlenek és egyenletek elhagyása következtében

α) Általános megjegyzések

A műszaki gyakorlatban gyakran előfordul, hogy valamely egyenletrendszerben — amelynek megoldását már ismerjük — néhány együttható megváltozik, vagy pedig egyes ismeretlenek, illetve egyenletek elmaradnak (például egy villamos hálózatban egyes ágak impedanciája megváltozik, vagy pedig egyes ágak, ill. csomópontok kiiktatódnak), és az így módosított egyenletrendszer megoldását is meg kell határozni. Szinte

magától vetődik fel a kérdés, hogy van-e valamilyen lehetőség a módosított egyenletrendszer megoldásának az eredeti egyenletrendszer ismert megoldásának felhasználásával történő kiszámítására. A matrixszámítás nyelvén ez a probléma oly módon fogalmazható meg, hogy valamely egyenletrendszer együtthatómatrixa néhány elemének megváltoztatásával vagy egyes sorainak, ill. oszlopainak elhagyásával nyert matrix reciproka hogyan fejezhető ki az eredeti együtthatómatrix ismert inverzének segítségével. Az alábbiakban erre a kérdésre adunk választ.

β) **Valamely matrix néhány elemének módosításával nyert matrix inverzének kiszámítása az eredeti matrix inverzéből (Sherman—Morrison-féle módszer)**

Tegyük fel, hogy valamely adott $\mathbf{A}$ matrixnak — amelynek inverzét már ismerjük — egy vagy több elemét meg kell változtatnunk, és ki kell számítanunk az így módosított matrix reciprokát. A következőkben ismertetünk egy olyan módszert, amely lehetővé teszi, hogy a módosított matrix reciprokát az *eredeti matrix ismert reciprokából* viszonylag kevés számítási munkával meghatározzuk.

Tegyük fel először, hogy az adott $\mathbf{A}$ matrix i-edik sorában és k-adik oszlopában álló a_{ik} elemhez hozzáadunk valamilyen d valós vagy komplex mennyiséget. Ebben az esetben a módosított matrix

$$\mathbf{A}_{mód} = \mathbf{A} + d\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*$$

alakban írható, ahol $\mathbf{e}_i$ illetve $\mathbf{e}_k^*$ olyan n elemből álló oszlop-, ill. sormatrixot jelent, amelynek i-edik, ill. k-adik eleme 1, összes többi eleme pedig nulla. Ekkor

$$\mathbf{A}_{mód}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - c(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1}), \tag{6.91}$$

ahol

$$c = \frac{d}{1 + d\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i}\,.$$

A matrixok szorzási szabályából következik, hogy

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i$ = az $\mathbf{A}^{-1}$ matrix i-edik oszlopa,

$\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1}$ = az $\mathbf{A}^{-1}$ matrix k-adik sora,

$\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i$ = az $\mathbf{A}^{-1}$ matrix i-edik oszlopának és k-adik sorának „metszéspontjában" elhelyezkedő elem.

Ugyanis

$$\mathbf{A}_{mód}\cdot\{\mathbf{A}^{-1} - c\,(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1})\} = \{\mathbf{A} + d\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*\}\,\{\mathbf{A}^{-1} - c(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1})\} =$$
$$= \mathbf{E} + d\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1} - c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1} - cd\,(\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1} =$$
$$= \mathbf{E} + d\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1} - c\{1 + d(\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i)\}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}\,.$$

Abban az esetben, ha az eredeti $\mathbf{A}$ matrixnak *több* elemét is módosítani kell, a módosított matrix inverzét az ismert $\mathbf{A}^{-1}$ matrixból a (6.91) képlet többszöri alkalmazásával számíthatjuk ki. Például ha az eredeti $\mathbf{A}$ matrix a_{ik} eleméhez d-t, a_{pq} eleméhez pedig f-et kell hozzáadni, akkor nyilván

$$\mathbf{A}_{mód} = \mathbf{A} + d\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^* + f\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q^*,$$

ahol az $\mathbf{e}_p$ oszlopmatrix, illetve az $\mathbf{e}_q^*$ sormatrix n eleme közül a p-edik, illetve a q-adik 1, az összes többi elem pedig nulla. Ekkor a (6.91) képlet alkalmazásával először kiszámítjuk az $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + d\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*$ matrix $\mathbf{A}^{-1}$ inverzét, majd $\mathbf{A}_1^{-1}$-ből kiindulva a (6.91) képlet ismételt alkalmazásával meghatározzuk az $\mathbf{A}_{\text{mód}} = \mathbf{A}_1 + f\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q^*$ matrix reciprokát.

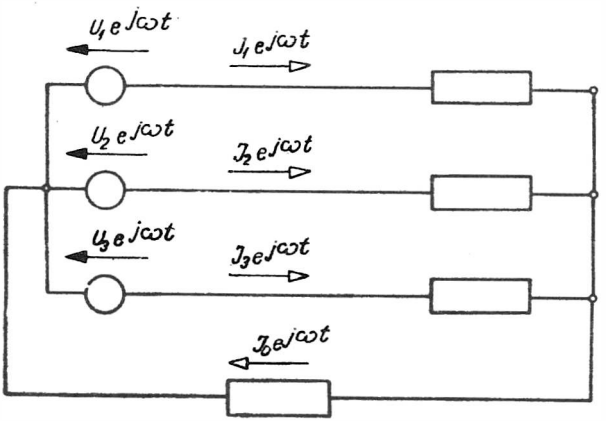
Előfordulhat, hogy a módosított matrix az eredeti $\mathbf{A}$ matrixból *egyetlen* olyan xy^* diád hozzáadásával állítható elő, amelyben az x oszlopmatrixnak, ill. az y^* sormatrixnak több nullától különböző eleme is van. Ez esetben

$$\mathbf{A}_{\text{méd}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - k\,(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})\,(\mathbf{y}^*\mathbf{A}^{-1}); \quad k = \frac{1}{1 + \mathbf{y}^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}. \tag{6.92}$$

Különösen egyszerű összefüggéshez jutunk abban a speciális esetben, amikor az eredeti matrix *n-ed rendű egységmatrix*, és a módosított matrix az n-ed rendű egységmatrixból egy $\mathbf{xy}^*$ diád hozzáadásával állítható elő. Ekkor ugyanis

$$(\mathbf{E} + \mathbf{xy}^*)^{-1} = \mathbf{E} - r\mathbf{xy}^*; \quad r = \frac{1}{1 + Sp(\mathbf{xy})^*}. \tag{6.93}$$

A (6.91) képlet alkalmazására a következő elektrotechnikai példát mutatjuk be: Egy háromfázisú generátor *három fázisvezetékből* és *nullvezetékből* álló vezetékrendszeren keresztül csillagkapcsolású háromfázisú fogyasztót táplál. (L. az ábrát.) Jelöljük



stacionárius állapotban a generátor által szolgáltatott fázisfeszültségeket $U_1e^{j\omega t}$, $U_2e^{j\omega t}$, $U_3e^{j\omega t}$-vel, a vezetékekben folyó áramokat pedig jelöljük $I_0e^{j\omega t}$, $I_1e^{j\omega t}$, $I_2e^{j\omega t}$, $I_3e^{j\omega t}$-vel. Tételezzük fel, hogy a generátor belső feszültségesése az adott terhelés mellett elhanyagolható. Jelöljük a három fázisvezeték és a fogyasztó által alkotott háromfázisú rendszer egy fázisának együttes (ohmos) ellenállását R-rel, öninduktivitását L-lel. Jelöljük továbbá a rendszer bármely két fázisa közti kölcsönös induktivitást M-mel, valamely fázis és a nullvezető közti kölcsönös induktivitást pedig M_0-lal.

Végül jelöljük a nullvezető ellenállását R_0-lal, öninduktivitását pedig L_0-lal. E jelölésekkel Kirchhoff törvényeiből a következő egyenleteket nyerjük:

$$
\begin{aligned}
U_1 e^{j\omega t} &= RI_1 e^{j\omega t} + j\omega L I_1 e^{j\omega t} + j\omega M I_2 e^{j\omega t} + j\omega M I_3 e^{j\omega t} - \\
&\quad - j\omega M_0 I_0 e^{j\omega t} + R_0 I_0 e^{j\omega t} + j\omega L_0 I_0 e^{j\omega t} - \\
&\quad - j\omega M_0 I_1 e^{j\omega t} - j\omega M_0 I_2 e^{j\omega t} - j\omega M_0 I_3 e^{j\omega t}, \\
U_2 e^{j\omega t} &= RI_2 e^{j\omega t}{}_2 + j\omega L I_2 e^{j\omega t} + j\omega M I_1 e^{j\omega t} + j\omega M I_3 e^{j\omega t} - \\
&\quad - j\omega M_0 I_0 e^{j\omega t} + R_0 I_0 e^{j\omega t} + j\omega L_0 I_0 e^{j\omega t} - \\
&\quad - j\omega M_0 I_1 e^{j\omega t} - j\omega M_0 I_2 e^{j\omega t} - j\omega M_0 I_3 e^{j\omega t}, \\
U_3 e^{j\omega t} &= RI_3 e^{j\omega t} + j\omega L I_3 e^{j\omega t} - j\omega M I_1 e^{j\omega t} + j\omega M I_2 e^{j\omega t} - \\
&\quad - j\omega M_0 I_0 e^{j\omega t} + R_0 I_0 e^{j\omega t} + j\omega L_0 I_0 e^{j\omega t} - \\
&\quad - j\omega M_0 I_1 e^{j\omega t} - j\omega M_0 I_2 e^{j\omega t} - j\omega M_0 I_3 e^{j\omega t}, \\
I_0 &= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{6.94}
$$

A fenti egyenletrendszerből $e^{j\omega t}$-vel való osztással és az I_0 kiküszöbölésével a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= [R + R_0 + j\omega(L + L_0 - M_0)]\, I_1 + [R_0 + j\omega(M + \\
&\quad + L_0 - M_0)]\, I_2 + [R_0 + j\omega(M + L_0 - M_0)]\, I_3 \\
U_2 &= [R + R_0 + j\omega(L + L_0 - M_0)]\, I_2 + [R_0 + j\omega(M + \\
&\quad + L_0 - M_0)]\, I_1 + [R_0 + j\omega(M + L_0 - M_0)]\, I_3 \\
U_3 &= [R + R_0 + j\omega(L + L_0 - M_0)]\, I_3 + [R_0 + j\omega(M + \\
&\quad + L_0 - M_0)]\, I_1 + [R_0 + j\omega(M + L_0 - M_0)]\, I_2
\end{aligned} \tag{6.95}
$$

Bevezetve az

$$a_0 = R + R_0 + j\omega(L + L_0 - M_0)$$

és

$$a_1 = R_0 + j\omega(M + L_0 - M_0)$$

jelöléseket, a (6.95) egyenletrendszert

$$
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \tag{6.96}
$$

matrixalakban írhatjuk. Ha még bevezetjük az

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}
$$

jelöléseket is, a (6.96) egyenlet az

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} \tag{6.97}$$

rövid alakot ölti.

Minthogy (1. I. rész, 1. § *e) ô)* II°, 64. oldal, (1.60) képlet)

$$\mathbf{A} = (a_0 + a_1)\,\mathbf{P} + (a_0 - a_1)\,\mathbf{Q}$$

és

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_0 + 2a_1}\,\mathbf{P} + \frac{1}{a_0 - a_1}\,\mathbf{Q},$$

a (6.97) egyenlet megoldása

$$\mathbf{i} = \frac{1}{a_0 + 2a_1}\,\mathbf{P}\mathbf{u} + \frac{1}{a_0 - a_1}\,\mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{6.98}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{a_0 - 2a_1}\begin{bmatrix} U_1 + U_2 + U_3 \\ U_1 + U_2 + U_3 \\ U_1 + U_2 + U_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{a_0 - a_1}\begin{bmatrix} 2U_1 - U_2 - U_3 \\ -U_1 + 2U_2 - U_3 \\ -U_1 - U_2 + 2U_3 \end{bmatrix} \tag{6.99}$$

Abban a speciális esetben, ha a generátor által szolgáltatott feszültségek *szimmetrikus rendszert* alkotnak, azaz

$$U_1 = U, \qquad U_2 = \varepsilon U, \qquad U_3 = \bar{\varepsilon} U,$$

akkor nyilván $U_1 + U_2 + U_3 = (1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon})\,U = 0$, és így

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,\frac{U}{a_0 - a_1}\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk most már azt az esetet, amikor valamelyik fázis (például az *első* fázis) ellenállása R-ről $R_1 = R + S$-re növekszik. A gyakorlatban ez a probléma merül fel az egyik fázisban fellépő aszimmetria (pl. aszimmetrikus terhelés, zárlat stb.) alkalmával. Látni fogjuk, hogy a Sherman—Morrison-féle módszer segítségével a probléma megoldása visszavezethető a „szimmetrikus háromfázisú terhelés" ($R_1 = R$) esetére felírt egyenletrendszer fentebb kiszámított (6.99) megoldására.

Aszimmetrikus terhelés esetén a (6.95) egyenletrendszer első egyenlete nyilván

$$\begin{aligned} U_1 = {} & [R + S + R_0 + j\omega(L + L_0 - M_0)]\,I_1 + \\ & + [R_0 + j\omega(M + L_0 - M_0)]\,I_2 + [R_0 + j\omega(M + L_0 - M_0)]\,I_3 \end{aligned} \tag{6.100}$$

alakúra módosul, tehát a (6.96) egyenlet helyett most az

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + S & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \tag{6.101}$$

matrixegyenletet kell megoldani. Minthogy

$$\begin{bmatrix} a_0 + S & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} + S\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[1,\ 0,\ 0], \tag{6.102}$$

a (6.101) egyenlet az

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A} + S\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*)\mathbf{i} \tag{6.103}$$

alakban is írható, ahol nyilván $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Következésképpen a megoldás a (6.91) képlet felhasználásával az alábbi alakban nyerhető:

$$\mathbf{i} = \{\mathbf{A} + S\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*\}^{-1}\mathbf{u} = \{\mathbf{A}^{-1} - c(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1)\,(\mathbf{e}_1^*\mathbf{A}^{-1})\}\,\mathbf{u} = \tag{6.104}$$

$$= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} - c\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u},$$

ahol

$$c = \frac{S}{1 + S\mathbf{e}_1^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1}\,. \tag{6.105}$$

Minthogy

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^* = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{a_0 + 2a_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{a_0 - a_1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

és

$$\mathbf{e}_1^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_0 + 2a_1} + \frac{2}{a_0 - a_1}\right),$$

következésképpen

$$c = \frac{S}{1 + S\left\{\dfrac{1}{3(a_0 + 2a_1)} + \dfrac{1}{3(a_0 - a_1)}\right\}} = \frac{S}{1 + S\,\dfrac{a_0 + a_1}{(a_0 + 2a_1)\,(a_0 - a_1)}}\,. \tag{6.106}$$

Végül

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{(a_0 + 2a_1)^2}\,\frac{1}{9}\,(U_1 + U_2 + U_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tag{6.107}$$

$$+ \frac{1}{(a_0 + 2a_1)\,(a_0 - a_1)}\,\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4U_1 + U_2 + U_3 \\ U_1 - 2U_2 - 2U_3 \\ U_1 - 2U_2 - 2U_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{(a_0 - a_1)^2}\,\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4U_1 - 2U_2 - 2U_3 \\ -2U_1 + U_2 + U_3 \\ -2U_1 + U_2 + U_3 \end{bmatrix}$$

abban az esetben, ha a generátor által szolgáltatott feszültségek szimmetrikus rendszert alkotnak, azt nyerjük, hogy

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{U}{a_0 + a_1}\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\,\frac{U}{a_0 + a_1}\left\{\frac{1}{a_0 + 2a_1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{a_0 - a_1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} c. \tag{6.108}$$

Megjegyezzük, hogy a (6.108) megoldást a következő alakban is írhatjuk:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{U}{a_0 - a_1} \left\{ -\frac{1}{3}\frac{c}{a_0 + 2a_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \right. \tag{6.109}$$

$$\left. + 1 - \frac{1}{3}\frac{c}{a_0 - a_1} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\frac{c}{a_0 - a_1} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right\}.$$

Ily módon a megoldást az ún. *szimmetrikus összetevőkkel kifejezett alakban* állítottuk elő.

γ) Valamely mátrixból sorok és oszlopok elhagyásával nyert mátrix reciprokának kiszámítása az eredeti mátrix inverzéből. (Egerváry-féle eljárás.)

Tegyük fel, hogy valamely $\mathbf{A}$ nem szinguláris n-ed rendű kvadratikus mátrix $\mathbf{A}^{-1} = [r_{kl}]$ reciprokát ismerjük. Hagyjuk el már most az $\mathbf{A}$ mátrixból az i-edik sort és a j-edik oszlopot, és jelöljük az ily módon nyert $n-1$-ed rendű kvadratikus mátrixot $\mathbf{A}_{\substack{i \\ j}}$-vel. Amint Egerváry Jenő[17] kimutatta, az $\mathbf{A}_{\substack{i \\ j}}$ mátrix inverze az eredeti $\mathbf{A}$ mátrix ismert $[r_{kl}]$ reciprokából közvetlenül is kiszámítható a következőképpen:

Vezessük be az $[r_{kl}]$ reciprokmátrix i-edik sorának, ill. j-edik oszlopának jelölésére az $\mathbf{r}^i = [r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in}]$, ill. $\mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \\ \vdots \\ r_{nj} \end{bmatrix}$ jelképet,

és számítsuk ki az

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{r}_j \mathbf{r}^i}{r_{ij}} \tag{6.110}$$

mátrixot. Könnyen belátható, hogy az ily módon nyert $\mathbf{R}$ mátrix olyan n-ed rendű kvadratikus mátrix, amelynek i-edik sorában, valamint j-edik oszlopában minden elem nullával egyenlő. Ha mármost az $\tilde{\mathbf{R}}$ mátrixból a csupa nulla elemet tartalmazó i-edik sort és k-adik oszlopot elhagyjuk, megkapjuk a keresett $\mathbf{A}^{-1}_{\substack{i \\ j}}$ reciprokmátrixot.

[17] A következőkben ismertetendő eljárást Egerváry Jenő nyomtatásban első ízben Lovass-Nagy Viktorral (akitől az eljárás szilárdságtani és hőtani alkalmazásának gondolata származik) és Kolin Lászlóval közösen írt cikkében ismertette, („Discrete Models and Matrix Methods in Engineering Mechanics", Proceedings of the Third Congress on Theoretical and Applied Mechanics – Bangalore, India, 1957, 259–276. oldal) az itt szereplő tételek bizonyítása azonban csak Egerváry két posthumus dolgozatában („On rank-diminishing operations and their applications to the solutions of linear equations", ZAMP *11* (1960) 376–386. oldal; „Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poisson'schen Differenzengleichung für beliebige Gebiete", Acta Mathematica, *11* (1960) 341–361. oldal) jelent meg. Ugyanezeket az összefüggéseket Egerváritól, ill. egymástól függetlenül Rózsa Pál (О применении клеточных матриц в механике корпускулярных систем, Усп. Мат. Наук., *14* (1959), вип. 4 (88), 207–211. oldal), illetve N. Sieber és H. Stenker („Ein Reduktionssatz über Umkehrmatrizen und seine Anwendung auf ein Beispiel aus der Statik", Wissenschaftliche Zeitschr. der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, *6* 1958/59, H. 2. 105–117. oldal) is levezették.

Ugyanis — mint ismeretes — az eredeti $\mathbf{A}$ matrix inverzének p, q indexű eleme $\frac{A_{pq}}{|\mathbf{A}|}$-val egyenlő, ahol A_{pq} az adj $\mathbf{A}$ matrix p, q indexű elemét jelenti. Következésképpen nyilvánvaló, hogy a (6.110) egyenlet által definiált $\tilde{\mathbf{R}}$ matrix p, q indexű eleme

$$\tilde{r}_{pq} = \frac{A_{pq}}{|\mathbf{A}|} - \frac{\frac{A_{pj}}{|\mathbf{A}|} \cdot \frac{A_{iq}}{|\mathbf{A}|}}{\frac{A_{ij}}{|\mathbf{A}|}} = \frac{A_{ij}A_{pq} - A_{pj}A_{iq}}{|\mathbf{A}| \cdot A_{ij}} . \tag{6.111}$$

Mármost az I. rész 1. § *c)* VI° alapján belátható, hogy

$$A_{ij}A_{pq} - A_{pj}A_{iq} = A_{\substack{ip \\ jq}} \cdot |\mathbf{A}| , \tag{6.112}$$

ahol $A_{\substack{ip \\ jq}}$ azt a determinánst jelenti, amelyet az $|\mathbf{A}|$ determinánsból az i és p indexű sorok, továbbá a j és q indexű oszlopok elhagyásával nyerünk. Tehát

$$\tilde{r}_{pq} = \frac{A_{\substack{ip \\ jq}}}{A_{ij}} \tag{6.113}$$

ami viszont a reciprokmatrix fogalmának definíciója szerint éppen az $A_{\substack{i \\ j}}$ matrix inverzének p, q indexű elemével egyenlő.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából különös érdekességgel bír a fent ismertetett módszernek az az általánosítása, amikor valamely ismert inverzű $\mathbf{A}$ n-ed rendű matrixból *egyidejűleg* el kell hagyni a k-adik, p-edik, ..., s-edik sort és a k-adik, p-edik, ..., s-edik oszlopot. (Azaz ugyanannyi sort kell elhagyni, mint amennyi oszlopot, és az elhagyott sorok indexei is megegyeznek az elhagyott oszlopok indexeivel.)

Jelöljük továbbra is az eredeti $\mathbf{A}$ matrix reciprokának elemeit r_{ij}-vel, sormatrixait r^i-vel és oszlopmatrixait r_j-vel, és számítsuk ki az

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{-1} - [\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_p, \ldots, \mathbf{r}_s] \begin{bmatrix} r_{kk} & r_{kp} & \ldots & r_{ks} \\ r_{pk} & r_{pp} & \ldots & r_{ps} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ r_{sk} & r_{sp} & \ldots & r_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^k \\ \mathbf{r}^p \\ \vdots \\ \mathbf{r}^s \end{bmatrix} \tag{6.114}$$

matrixot. Ha mármost a (6.114) képlet alkalmazásával nyert n-ed rendű $\tilde{\mathbf{R}}$ matrixból a $k, p, \ldots, s$ indexű sorokat és oszlopokat — amelyek csupa nulla elemet tartalmaznak — elhagyjuk, megkapjuk az eredeti $\mathbf{A}$ matrixból a $k, p, \ldots, s$ indexű sorok és oszlopok elhagyásával nyert $\mathbf{A}_{\substack{k, p, \ldots, s \\ k, p, \ldots, s}}$ matrix reciprokát.

A fent ismertetett módszer alkalmazását egy hővezetési probléma közelítő megoldásának keretében fogjuk bemutatni.

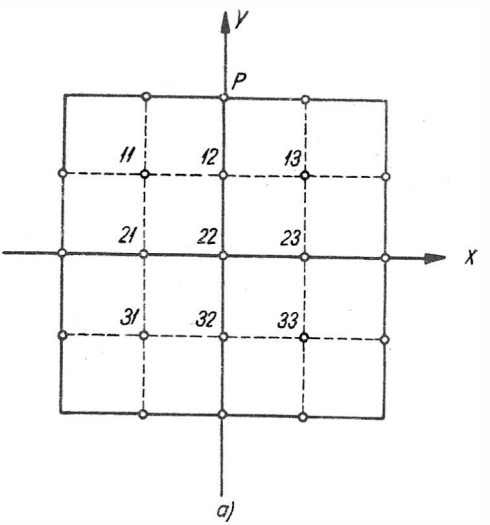
Keressük a *stacionárius* hőmérséklet-eloszlást egy olyan, homogén és izotrop szilárd anyagból álló négyzet keresztmetszetű hasáb belsejében, amelynek egyik éle az x, y, z derékszögű koordináta-rendszer z tengelyével párhuzamos, és amely az x,y koordinátasíkra merőleges (z) irányban végtelen hosszúnak tekinthető. Ha feltesszük, hogy az anyagi állandók (sűrűség, fajsúly, hővezetési szám) mind függetlenek a hőmérséklettől, továbbá feltesszük, hogy az x, y síkra merőleges irányban nincs hőáramlás, akkor a hasáb belsejében egy ún. „kétdimenziós" hőmérséklet-eloszlás alakul ki, amelyet a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{6.114}$$

parciális differenciálegyenlet, valamint a kezdeti és kerületi feltételek határoznak meg. (Itt u a hőfok, $a^2 = \frac{\lambda}{c \cdot \varrho}$ a hőmérséklet-vezetési tényező, ϱ a sűrűség, c a fajhő, λ a hővezetési tényező.) Minthogy jelen esetben feladatunkat a *stacionárius* hőmérséklet-eloszlás meghatározása képezi, a (6.114) egyenletből a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6.115}$$

Laplace-féle parciális differenciálegyenletre jutunk, amely a kerületi feltétellel együtt határozza meg a keresett stacionárius hőmérséklet-eloszlást.



A derékszögű hasábból az x, y koordinátasík az *a)* ábrán látható négyzetet metszi ki. Tegyük fel mármost, hogy a hasáb felszínének hőmérséklete *egyetlen alkotó kivételével* valamennyi pontban állandóan nulla, míg az illető alkotó (amelyet az x, y sík a P pontban metsz) pontjaiban a hőmérséklet az állandó T értékkel egyenlő. Ilyen kerületi feltételek mellett a (6.114) parciális differenciálegyenlet megoldása meglehetősen bonyolult. Gyakran elegendő azonban, ha a probléma egzakt matematikai megoldása helyett a következő közelítő eljárást alkalmazzuk.[18]

Szerkesszünk egy négyzetes hálót az ábrán látható módon, és keressük kizárólag e háló csomópontjaiban a hőmérséklet értékét. (Az egyes csomópontokhoz tartozó hőfokokat az illető csomópont helyzetét meghatározó kettős indexszel jelöljük.) Ha most már a helykoordináták szerinti parciális deriváltakat a megfelelő differenciahányadosokkal approximáljuk, akkor a (6.114) parciális differenciálegyenletből a következő algebrai egyenletrendszerre jutunk:

[18] Lásd D J. Panow: Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren, Berlin, 1955, Akademie-Verlag vagy S. H. Crandall: Engineering Analysis, New York(Toronto)London, 1956, McGraw-Hill.

$$
\begin{aligned}
4u_{11} - u_{12} - u_{21} &= 0\\
-u_{11} + 4u_{12} + u_{13} - u_{22} &= T\\
-u_{12} + 4u_{13} - u_{23} &= 0\\
-u_{11} + 4u_{21} - u_{22} - u_{31} &= 0\\
-u_{12} - u_{21} + 4u_{22} - u_{23} - u_{32} &= 0\\
-u_{13} - u_{22} + 4u_{23} - u_{33} &= 0\\
-u_{21} + 4u_{31} - u_{32} &= 0\\
-u_{22} - u_{31} + 4u_{32} - u_{33} &= 0\\
-u_{23} - u_{32} + 4u_{33} &= 0
\end{aligned}
\tag{6.116}
$$

vagy matrixalakban:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1\\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} u_{11}\\ u_{12}\\ u_{13}\\ u_{21}\\ u_{22}\\ u_{23}\\ u_{31}\\ u_{32}\\ u_{33} \end{array}\right]
= T
\left[\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{array}\right]
\tag{6.117}
$$

Az

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_3 + 2\mathbf{E}_3 & -\mathbf{E}_3 & 0\\ -\mathbf{E}_3 & \mathbf{C}_3 + 2\mathbf{E}_3 & -\mathbf{E}_3\\ 0 & -\mathbf{E}_3 & \mathbf{C}_3 + 2\mathbf{E}_3 \end{bmatrix};\quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};\quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11}\\ u_{12}\\ u_{13}\\ \vdots\\ u_{33} \end{bmatrix};\quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix}
$$

jelölésekkel a (6.117) egyenlet az

$$
\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = T\mathbf{e}_2 \tag{6.118}
$$

rövid alakban írható. Ennek megoldása nyilván

$$
\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \cdot T\mathbf{e}_2 = T\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{e}_2 .
$$

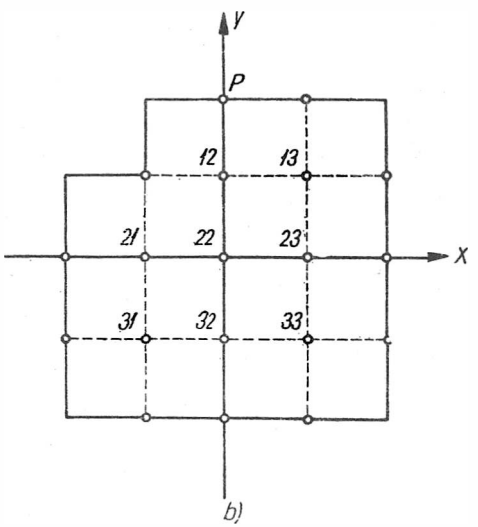
Az $\mathbf{A}^{-1}$ reciprokmatrixot már korábban kiszámítottuk. (Lásd az (1.67) képletet a 67. oldalon.) Ha az (1.67) képletben kiemelt $\frac{1}{224}$-gyel a matrix mindegyik elemét megszorozzuk, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0{,}299 & 0{,}098 & 0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}062 & 0{,}026 & 0{,}031 & 0{,}026 & 0{,}013 \\ 0{,}098 & 0{,}330 & 0{,}098 & 0{,}062 & 0{,}124 & 0{,}062 & 0{,}026 & 0{,}046 & 0{,}026 \\ 0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}299 & 0{,}026 & 0{,}062 & 0{,}098 & 0{,}013 & 0{,}026 & 0{,}031 \\ \hline 0{,}098 & 0{,}062 & 0{,}026 & 0{,}330 & 0{,}124 & 0{,}046 & 0{,}098 & 0{,}062 & 0{,}026 \\ 0{,}062 & 0{,}124 & 0{,}062 & 0{,}124 & 0{,}373 & 0{,}124 & 0{,}062 & 0{,}124 & 0{,}062 \\ 0{,}026 & 0{,}062 & 0{,}098 & 0{,}046 & 0{,}124 & 0{,}330 & 0{,}026 & 0{,}062 & 0{,}098 \\ \hline 0{,}031 & 0{,}026 & 0{,}013 & 0{,}098 & 0{,}062 & 0{,}026 & 0{,}299 & 0{,}098 & 0{,}031 \\ 0{,}026 & 0{,}046 & 0{,}026 & 0{,}062 & 0{,}124 & 0{,}062 & 0{,}098 & 0{,}330 & 0{,}098 \\ 0{,}013 & 0{,}026 & 0{,}031 & 0{,}026 & 0{,}062 & 0{,}098 & 0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}299 \end{array}\right]$$

és így

$$\mathbf{u} = T \begin{bmatrix} 0{,}098 \\ 0{,}330 \\ 0{,}098 \\ 0{,}062 \\ 0{,}124 \\ 0{,}062 \\ 0{,}026 \\ 0{,}046 \\ 0{,}026 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel mármost, hogy az eredetileg adott négyzet keresztmetszetű hasábból ki kell vágnunk egy (z-irányban ugyancsak végtelen hosszú) darabot oly módon, hogy a b_2 ábrán megadott keresztmetszetű hasábot nyerjük. Keressük most ebben a megcsonkított hasábban a stacionárius hőmérséklet-eloszlást abban az esetben, ha a hőmérséklet — egyetlen alkotó kivételével — a hasáb felszínének minden pontjában állandóan zérus, és a hasáb egy alkotója mentén (amely az x, y síkot a P pontban metszi) a hőmérséklet az állandó T értékkel egyenlő.



Amennyiben a (6.115) parciális differenciálegyenlet helyett most is a fentebb alkalmazott közelítő eljárást választjuk, a hőmérséklet-eloszlás közelítő leírására szolgáló algebrai egyenletrendszer a (6.116) egyenletrendszerből egyszerűen úgy nyerhető, hogy az első egyenletet teljesen elhagyjuk, továbbá az összes többi egyenletből elhagyjuk az u_{11} ismeretlent:

$$
\begin{aligned}
4u_{12} - u_{13} - u_{22} &= T \\
-u_{12} + 4u_{13} - u_{23} &= 0 \\
4u_{21} - u_{22} - u_{31} &= 0 \\
-u_{12} - u_{21} + 4u_{22} - u_{23} - u_{32} &= 0 \\
-u_{13} - u_{22} + 4u_{23} - u_{33} &= 0 \\
-u_{21} + 4u_{31} - u_{32} &= 0 \\
-u_{22} - u_{31} + 4u_{32} - u_{33} &= 0 \\
-u_{23} - u_{32} + 4u_{33} &= 0
\end{aligned}
\tag{6.119}
$$

vagy részletesen kiírt matrixalakban

$$
\left[\begin{array}{cc|ccc|ccc}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} u_{12} \\ u_{13} \\ \hline u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ \hline u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{array}\right]
= T
\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]
\tag{6.120}
$$

Könnyen felismerhető, hogy a (6.120) egyenlet együtthatómatrixa előállítható a (6.117) egyenlet együtthatómatrixából az első sor és az első oszlop elhagyásával; ezért a következőkben a (6.120) egyenlet együtthatómatrixát az $\mathbf{A}_{\underset{1}{1}}$ jelképpel jelöljük.

Az $\mathbf{A}_{\underset{1}{1}}$ matrix inverzét Egerváry módszerével a következőképpen számíthatjuk ki a fentebb meghatározott $\mathbf{A}^{-1}$ reciprokmatrixból:

Először is kiszámítjuk az $\frac{1}{r_{11}}\mathbf{r}_1\mathbf{r}^1$ matrixot. Jelen esetben

$$
r_{11} = 0{,}299; \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}299 \\ 0{,}098 \\ 0{,}031 \\ 0{,}098 \\ 0{,}062 \\ 0{,}026 \\ 0{,}031 \\ 0{,}026 \\ 0{,}013 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{r}_1^*
$$

tehát $\frac{1}{r_{11}}\mathbf{r}_1\mathbf{r}^1 =$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0{,}299 & 0{,}098 & 0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}062 & 0{,}026 & 0{,}031 & 0{,}026 & 0{,}013 \\ 0{,}098 & 0{,}032 & 0{,}010 & 0{,}032 & 0{,}020 & 0{,}009 & 0{,}010 & 0{,}009 & 0{,}004 \\ 0{,}031 & 0{,}010 & 0{,}003 & 0{,}010 & 0{,}006 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}001 \\ \hline 0{,}098 & 0{,}032 & 0{,}010 & 0{,}032 & 0{,}020 & 0{,}009 & 0{,}010 & 0{,}009 & 0{,}004 \\ 0{,}062 & 0{,}020 & 0{,}006 & 0{,}020 & 0{,}013 & 0{,}005 & 0{,}006 & 0{,}005 & 0{,}003 \\ 0{,}026 & 0{,}009 & 0{,}003 & 0{,}009 & 0{,}005 & 0{,}002 & 0{,}003 & 0{,}002 & 0{,}001 \\ \hline 0{,}031 & 0{,}010 & 0{,}003 & 0{,}010 & 0{,}006 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}001 \\ 0{,}026 & 0{,}009 & 0{,}003 & 0{,}009 & 0{,}005 & 0{,}002 & 0{,}003 & 0{,}002 & 0{,}001 \\ 0{,}013 & 0{,}004 & 0{,}001 & 0{,}004 & 0{,}003 & 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001 \end{array}\right]$$

Ha mármost az így nyert $\frac{1}{r_{11}}\mathbf{r}_1\mathbf{r}^1$ matrixot kivonjuk az $\mathbf{A}^{-1}$ matrixból, és a kivonás eredményeként kapott matrix (csupa nullát tartalmazó) első sorát és első oszlopát elhagyjuk, akkor megkapjuk az $\mathbf{A}_{\overset{1}{1}}$ matrix inverzét:

(6.121)

$$\mathbf{A}_{\overset{1}{1}}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0{,}298 & 0{,}088 & 0{,}030 & 0{,}104 & 0{,}051 & 0{,}016 & 0{,}035 & 0{,}022 \\ 0{,}088 & 0{,}296 & 0{,}016 & 0{,}056 & 0{,}095 & 0{,}010 & 0{,}023 & 0{,}030 \\ \hline 0{,}030 & 0{,}016 & 0{,}298 & 0{,}104 & 0{,}037 & 0{,}088 & 0{,}053 & 0{,}022 \\ 0{,}104 & 0{,}056 & 0{,}104 & 0{,}360 & 0{,}119 & 0{,}056 & 0{,}119 & 0{,}059 \\ 0{,}051 & 0{,}095 & 0{,}037 & 0{,}119 & 0{,}328 & 0{,}023 & 0{,}060 & 0{,}097 \\ \hline 0{,}016 & 0{,}010 & 0{,}088 & 0{,}056 & 0{,}023 & 0{,}296 & 0{,}095 & 0{,}030 \\ 0{,}035 & 0{,}023 & 0{,}053 & 0{,}119 & 0{,}060 & 0{,}095 & 0{,}328 & 0{,}097 \\ 0{,}022 & 0{,}030 & 0{,}022 & 0{,}059 & 0{,}097 & 0{,}030 & 0{,}097 & 0{,}298 \end{array}\right]$$

Tehát a megcsonkított hasábban kialakuló hőmérséklet-eloszlást közelítőleg az

$$\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{13} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} 0{,}298 \\ 0{,}088 \\ 0{,}030 \\ 0{,}140 \\ 0{,}051 \\ 0{,}016 \\ 0{,}035 \\ 0{,}022 \end{bmatrix}$$

oszlopmatrix elemei határozzák meg. (Minthogy jelen esetben a megoldandó egyenlet jobb oldalán szereplő adott oszlopmatrixnak csak egyetlen zérustól különböző eleme van, elegendő lett volna az $\frac{1}{r_{11}}\mathbf{r}_1\mathbf{r}^1$ matrixnak csupán a második oszlopát kiszámítani. A teljes $\frac{1}{r_{11}}\mathbf{r}_1\mathbf{r}^1$ matrixot és az egész $\mathbf{A}_{\overset{1}{1}}^{-1}$ reciprokmatrixot a módszer illusztrációjául szolgáló számpéldaképpen számítottuk ki.)

7. §. LINEÁRIS, ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK MEGOLDÁSA A MATRIXSZÁMÍTÁS FELHASZNÁLÁSÁVAL

a) A matrixelmélet alkalmazása a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek elméletében

α) **Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer**

I°. Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer. Az egyetlen (skalár) $x(t)$ ismeretlen függvényt tartalmazó elsőrendű homogén lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$\dot{x} = Ax. \tag{7.1}$$

Előírható továbbá kezdeti feltételképpen, hogy a t független változónak $t = 0$ értékénél a keresett $x(t)$ függvény egy megadott x_0 értéket vegyen fel, azaz

$$x(0) = x_0. \tag{7.2}$$

Differenciálással, illetőleg behelyettesítéssel azonnal igazolható, hogy azt a $x(t; x_0)$ megoldást, mely mind a differenciálegyenletet, mind a kezdeti feltételt kielégíti az

$$x(t;\ x_0) = e^{At} \cdot x_0 \tag{7.3}$$

formula szolgáltatja.

A matrixszámításnak az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenlettel analóg differenciálegyenlet-rendszerek megoldására való alkalmazása mármost lényegileg úgy jellemezhető, hogy a fentebbi egyszerű megoldási formula rendszerekre is érvényes marad, ha az abban szereplő skalárokat megfelelő matrixokkal helyettesítjük.

Az $\dot{x} = Ax = 0$ egyenletnek és az $x(0) = x_0$ kezdeti feltételnek az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek közül az alábbi általános alakban írható homogén lineáris egyenletrendszer, illetve kezdeti feltétel az analogonja:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{7.4}$$

illetve

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ \vdots \\ x_n(0) = x_{n0} \end{cases} \tag{7.5}$$

Ezek az

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

oszlopmatrixok és az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrix bevezetésével nyilván az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x};\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.6), (7.7}$$

matrixegyenletekké foglalhatók össze.

Kimutatható, hogy a (7.3) skalárformulából a megfelelő helyettesítésekkel keletkező

$$\dot{\mathbf{x}}(t;\ \mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0 \tag{7.8}$$

vektor kielégíti a (7.6) differenciálegyenletet és a (7.7) kezdeti feltételt. Ugyanis az $\mathbf{A}$ matrixnak itt szereplő

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots$$

függvénye minden $\mathbf{A}$ matrixra és minden t-re konvergens hatványsorral van definiálva; a t szerinti tagonkénti differenciálással nyert végtelen sor:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3t^2 + \dots = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t).$$

Tehát az $\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t}$ kvadratikus matrix kielégíti az $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ egyenletet és a $t = 0$ helyen nyilván az egységmatrixba megy át: $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$. Ebből azonban rögtön következik, hogy az $\mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ oszlopmatrix mind az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ differenciálegyenletet, mind pedig az $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdőfeltételt kielégíti, mert nyilván

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{X}\right) \cdot \mathbf{x}_0 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x};$$

továbbá az $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ matrixfüggvény fenti végtelen sorából következik, hogy:

$$\lim_{t \to 0} (e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0,$$

tehát a (7.7) kezdőfeltétel is ki van elégítve.

II°. Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer. Az egyetlen (skalár) $x(t)$ ismeretlen függvényt tartalmazó elsőrendű lineáris állandó együtthatás inhomogén differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$\dot{x} - Ax = g(t). \tag{7.9}$$

Előírható továbbá kezdeti feltételként, hogy a t független változónak $t = 0$ értékénél az $x(t)$ függvény egy megadott x_0 értéket vegyen fel, azaz $x(0) = x_0$.

Differenciálással, illetőleg behelyettesítéssel igazolható, hogy a differenciálegyenletet és a kezdeti feltételt egyidejűleg kielégítő $x(t; x_0)$ függvényt a következő képlet szolgáltatja:

$$x(t; x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}g(\tau)d\tau. \tag{7.10}$$

Az analóg inhomogén differenciálegyenlet-rendszer és a hozzátartozó kezdeti feltételek a következők:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = g_1(t) \\ \dot{x}_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = g_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = g_n(t) \end{cases} \tag{7.11}$$

illetve

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ \vdots \\ x_n(0) = x_{n0} \end{cases} \tag{7.12}$$

Az I°-ban bevezetett $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_0$ oszlopmatrixok és $\mathbf{A}$ kvadratikus matrix, továbbá a

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{g}(t) \tag{7.13}$$

oszlopmatrix segítségével a megoldandó egyenletrendszer és a kezdeti feltételek a következő matrixegyenletekbe foglalhatók össze:

$$\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{7.14), (7.15}$$

Az $\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$ egyenletrendszernek az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdőfeltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)d\tau. \tag{7.16}$$

Ugyanis — amint az I°-ban rámutattunk — az $e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{y}$ képlet az $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ homogén egyenletnek az összes partikuláris megoldását magában foglalja. Tegyük fel most már azt a kérdést, hogy az $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$ egyenletnek van-e $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{y}(t)$ alakú partikuláris megoldása. (Az inhomogén matrixegyenlet ilyen alakú partikuláris megoldásának keresése a lineáris inhomogén skalárdifferenciálegyenletek elméletében általánosan alkalmazott eljárásnak, az „állandók variálása" elvének matrixanalogonja.)

A feltételezett $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{y}(t)$ alakú megoldást az inhomogén egyenletbe helyettesítve, nyerjük, hogy

$$e^{\mathbf{A}t}\{\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(t)\} - \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t),$$

azaz

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{g}(t),$$

tehát:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{g}(t)\, dt, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \cdot \mathbf{g}(\tau)\, d\tau.$$

Azzal, hogy az alsó határt nullának választottuk, egy olyan

$$e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{g}(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)\, d\tau$$

partikuláris megoldást nyertünk, amely az $\mathbf{x}(0) = 0$ kezdeti feltételt elégíti ki. Minthogy továbbá az inhomogén egyenlet bármelyik partikuláris megoldásának és a homogén egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldásának az összege is kielégíti az inhomogén egyenletet, tehát az inhomogén egyenletet és az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltételt egyidejűleg kielégítő megoldás az $\mathbf{x}(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás és a homogén egyenletnek az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldásának összegeként nyerhető.

β) Másodrendű lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer

I°. Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer. Az egyetlen (skalár) $x(t)$ ismeretlen függvényt tartalmazó másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet — amennyiben az első deriváltat már valamilyen módon eltávolítottuk — a következő alakú:

$$\ddot{x} + Ax = 0. \tag{7.17}$$

Tekintettel arra, hogy ez a differenciálegyenlet másodrendű, a független változónak $t = 0$ értékéhez tetszés szerint előírhatjuk, hogy a keresett ismeretlen függvény megadott x_0 értéket és annak első deriváltja megadott $\dot{x}_0$ értéket vegyen fel. Differenciálással, illetőleg behelyettesítéssel könnyen igazolható, hogy az adott differenciálegyenletet és az $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ kezdeti feltételeket egyidejűleg kielégítő $x(t; x_0, \dot{x}_0)$ megoldást a

$$x(t; x_0, \dot{x}_0) = \cos\left(\sqrt{A}t\right) x_0 + \frac{\sin\left(\sqrt{A}t\right)}{\sqrt{A}} \dot{x}_0 \tag{7.18}$$

formula szolgáltatja.

Az $\ddot{x} + Ax = 0$ differenciálegyenlettel analóg differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ddot{x}_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{7.19}$$

Továbbá előírhatók a következő kezdeti feltételek:

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = x_{10}; & \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10} \\ x_2(0) = x_{20}; & \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20} \\ \vdots & \vdots \\ x_n(0) = x_{n0}; & \dot{x}_n(0) = \dot{x}_{n0} \end{array} \tag{7.20}$$

Az $\alpha)$-ban bevezetett $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_0$ oszlopmatrixok és $\mathbf{A}$ kvadratikus matrix, továbbá a

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n0} \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

oszlopmatrix alkalmazásával a megoldandó differenciálegyenlet-rendszer és a hozzátartozó kezdeti feltételek a következő matrixegyenletekké foglalhatók össze:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = 0; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0. \tag{7.22}$$

Az $\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ egyenletrendszernek az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$; $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ kezdőfeltételeket kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = \cos\left(\sqrt{\mathbf{A}}t\right) \mathbf{x}_0 + \frac{\sin\left(\sqrt{\mathbf{A}}t\right)}{\sqrt{\mathbf{A}}} \dot{\mathbf{x}}_0. \tag{7.23}$$

A megoldási formulában az **A** matrix négyzetgyökeinek a szereplése csak látszólagos, ha ugyanis az ott szereplő matrixfüggvényeket hatványsorba fejtjük:

$$\cos(\sqrt{\mathbf{A}}t) = \mathbf{E} - \frac{1}{2!}(\sqrt{\mathbf{A}}t)^2 + \frac{1}{4!}(\sqrt{\mathbf{A}}t)^4 - + \dots$$

és

$$\frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}}t)}{\sqrt{\mathbf{A}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{A}}t}{\sqrt{\mathbf{A}}} - \frac{1}{3!}\frac{(\sqrt{\mathbf{A}}t)^3}{\sqrt{\mathbf{A}}} + \frac{1}{5!}\frac{(\sqrt{\mathbf{A}}t)^5}{\sqrt{\mathbf{A}}} - + \dots,$$

akkor — amint látható — a négyzetgyököt tartalmazó tagok eltűnnek.

II°. Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer. Az egyetlen (skalár) $x(t)$ ismeretlen függvényt tartalmazó másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet az első derivált eltávolítása után a következő általános alakban írható:

$$\ddot{x} + Ax = g(t). \tag{7.24}$$

Előírható továbbá, hogy a t független változónak $t = 0$ értékénél a keresett $x(t)$ függvény megadott x_0 értéket, a keresett függvény $\dot{x}(t)$ deriváltja pedig megadott $\dot{x}_0$ értéket vegyen fel, azaz

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \tag{7.25}$$

Differenciálással, illetőleg behelyettesítéssel igazolható, hogy az adott differenciálegyenletet és kezdeti feltételeket egyidejűleg kielégítő $x(t; x_0, \dot{x}_0)$ megoldást az

$$x(t; x_0, \dot{x}_0) = \cos(\sqrt{A}t)\,x_0 + \frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\,\dot{x}_0 + \int_0^t \frac{\sin[\sqrt{A}(t-\tau)]}{\sqrt{A}}\,g(\tau)\,d\tau \tag{7.26}$$

képletből nyerhetjük.

Az $\ddot{x} + Ax = g(t)$ differenciálegyenlettel analóg differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = g_1(t)\\
&\ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = g_2(t)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\ddot{x}_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = g_n(t).
\end{aligned} \tag{7.27}$$

A kezdeti feltételek pedig a következőképpen írhatók elő:

$$\begin{aligned}
&x_1(0) = x_{10}; && \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}\\
&x_2(0) = x_{20}; && \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&x_n(0) = x_{n0}; && \dot{x}_n(0) = \dot{x}_{n0}.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Az előzőkben bevezetett $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_0$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}_0$ és $\mathbf{g}(t)$ oszlopmatrixok és $\mathbf{A}$ kvadratikus matrix felhasználásával a megoldandó differenciálegyenlet-rendszer és a hozzá tartozó kezdeti feltételek a következő matrixegyenletekké foglalhatók össze:

(7.29), (7.30) $\qquad \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0.$

Az $\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$ rendszernek az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdőfeltételeket kielégítő megoldása:

$$(7.31)\quad \mathbf{x}(t;\, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = \cos\left(\sqrt{\mathbf{A}}\, t\right)\mathbf{x}_0 + \frac{\sin\left(\sqrt{\mathbf{A}}\, t\right)}{\sqrt{\mathbf{A}}}\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \frac{\sin\left[\sqrt{\mathbf{A}}\,(t-\tau)\right]}{\sqrt{\mathbf{A}}}\,\mathbf{g}(\tau)\,d\tau.$$

(Az $\mathbf{A}$ matrix négyzetgyökeinek szereplése az előző I°-ban kifejtett okokra való tekintettel itt is csak látszólagos.)

III°. Megjegyzés. A 7. § *a)*-ban levezetett megoldási formulák tényleges alkalmazása során a formulákban szereplő matrixfüggvényeket a minimál egyenlet felhasználásával minimális fokszámú matrixpolinomra redukáljuk, és innen legtöbbször áttérünk a matrix kanonikus alakjára. Példákat erre a következőkben látunk.

Példák

α | 1. Oldjuk meg az alábbi lineáris homogén elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert az adott kezdeti feltételekkel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -7x_1 - 7x_2 + 5x_3; \\ \dot{x}_2 &= -8x_1 - 8x_2 - 5x_3; \\ \dot{x}_3 &= \quad - 5x_2. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Kezdeti feltételek:} \\ &t = 0\text{-nál } x_1 = 3; \\ &x_2 = -2; \quad x_3 = 1. \end{aligned}$$

A feladat matrix alakban:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -8 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -8 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$e^{\mathbf{A}t}$ kiszámítása a következő lépésekben történik:

A) Megkeressük $\mathbf{A}$ karakterisztikus egyenletének gyökeit:

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{bmatrix} \lambda + 7 & 7 & -5 \\ 8 & \lambda + 8 & 5 \\ 0 & 5 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda - 375 = 0;$$

$$\lambda_1 = 5; \qquad \lambda_2 = -5; \qquad \lambda_3 = -15.$$

B) Meghatározzuk az egyes gyökökhöz tartozó Lagrange-féle polinomokat:

$$L_1(\lambda) = \frac{(\lambda+5)(\lambda+15)}{10\cdot 20} = \frac{1}{200}(\lambda^2+20\lambda+75);$$

$$L_2(\lambda) = \frac{(\lambda-5)(\lambda+15)}{(-10)\cdot 10} = -\frac{1}{100}(\lambda^2+10\lambda-75);$$

$$L_3(\lambda) = \frac{(\lambda-5)(\lambda+5)}{(-20)\cdot(-10)} = \frac{1}{200}(\lambda^2-25).$$

C) λ helyébe mindenhová **A**-t helyettesítünk. Először kiszámítjuk $\mathbf{A}^2$-et:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -8 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -8 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 & 80 & 0 \\ 120 & 145 & 0 \\ 40 & 40 & 25 \end{bmatrix} =$$

$$= 5\begin{bmatrix} 21 & 16 & 0 \\ 24 & 29 & 0 \\ 8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{200}(\mathbf{A}^2+20\,\mathbf{A}+75\,\mathbf{E}) = \frac{1}{40}\left(\begin{bmatrix} 21 & 16 & 0 \\ 24 & 29 & 0 \\ 8 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + 4\begin{bmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -8 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} + 15\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 8 & -12 & 20 \\ -8 & 12 & -20 \\ 8 & -12 & 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}[2,\ -3,\ 5].$$

$$L_2(\mathbf{A}) = -\frac{1}{100}(\mathbf{A}^2+10\,\mathbf{A}-75\,\mathbf{E}) = -\frac{1}{20}\left(\begin{bmatrix} 21 & 16 & 0 \\ 24 & 29 & 0 \\ 8 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + 2\begin{bmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -8 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} - 15\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{20}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 10 \\ 8 & -2 & -10 \\ 8 & -2 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}[4,\ -1,\ -5].$$

$$L_3(\mathbf{A}) = \frac{1}{200}(\mathbf{A}^2 - 25\,\mathbf{E}) = \frac{1}{40}\left(\begin{bmatrix} 21 & 16 & 0 \\ 24 & 29 & 0 \\ 8 & 8 & 5 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 16 & 16 & 0 \\ 24 & 24 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}[1,\ 1,\ 0]$$

D) A kiszámított $L_1(\mathbf{A})$, $L_2(\mathbf{A})$ és $L_3(\mathbf{A})$ matrixokat megszorozzuk rendre e^{5t}, e^{-5t} és e^{-15t}-vel. Így megkapjuk $e^{\mathbf{A}t}$-t.

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{e^{5t}}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}[2,\ -3,\ 5] + \frac{e^{-5t}}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}[4,\ -1,\ -5] +$$

$$+ \frac{e^{-15t}}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}[1,\ 1,\ 0].$$

$e^{\mathbf{A}t}$ meghatározása után a kezdeti feltételeket kielégítő megoldást úgy nyerjük, hogy szorzunk jobbról $\mathbf{x}(0)$-val:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}(0) = \frac{e^{5t}}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}[2,\ -3,\ 5]\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{e^{-5t}}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}[4,\ -1,\ -5]\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-15t}}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}[1,\ 1,\ 0]\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{17}{10}e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{9}{10}e^{-5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}4^{-15t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás skalár alakban:

$$x_1 = 1{,}7e^{5t} + 0{,}9e^{-5t} + 0{,}4\text{-}e^{-15t};$$

$$x_2 = -1{,}7e^{5t} - 0{,}9e^{-5t} + 0{,}6e^{-15t};$$

$$x_3 = 1{,}7e^{5t} - 0{,}9e^{-5t} + 0{,}2e^{-15t}.$$

2. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszert az adott kezdeti feltételekkel:

$$\dot{x}_1 = -7x_1 + x_2; \qquad x_1(0) = 3;$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2; \qquad x_2(9) = -5.$$

Matrix-differenciálegyenlet formájában:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 7 & -1 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0;$$

$$\lambda_1 = -6 + j; \qquad \lambda_2 = -6 - j.$$

A Lagrange-féle polinomok:

$$L_1(\lambda) = \frac{1}{2j}(\lambda + 6 + j); \qquad L_2(\lambda) = -\frac{1}{2j}(\lambda + 6 - j).$$

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{2j}\{\mathbf{A} + (6 + j)\,\mathbf{E}\} = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} -1 + j & 1 \\ -2 & 1 + j \end{bmatrix}.$$

$$L_2(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2j}\{\mathbf{A} + (6 - j)\,\mathbf{E}\} = -\frac{1}{2j}\begin{bmatrix} -1 - j & 1 \\ -2 & 1 - j \end{bmatrix}$$

$e^{\mathbf{A}t}$ felírása:

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2j} e^{(-6+j)t}\begin{bmatrix} -1 + j & 1 \\ -2 & 1 + j \end{bmatrix} - \frac{1}{2j} e^{(-6-j)t}\begin{bmatrix} -1 - j & 1 \\ -2 & 1 - j \end{bmatrix}.$$

A megoldás:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}(0) = \frac{1}{2j} e^{(-6+j)t}\begin{bmatrix} -1 + j & 1 \\ -2 & 1 + j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{1}{2j} e^{(-6-j)t}\begin{bmatrix} -1 - j & 1 \\ -2 & 1 - j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = e^{-6t}\left(\frac{e^{jt}}{2j}\begin{bmatrix} -8 + 3j \\ -11 - 5j \end{bmatrix} - \frac{e^{-jt}}{2j}\begin{bmatrix} -8 - 3j \\ -11 + 5j \end{bmatrix}\right).$$

A megoldás valós skalár alakban:

$$x_1 = e^{-6t}\left\{\frac{-8+3j}{2j}(\cos t + j\sin t) + \frac{8+3j}{2j}(\cos t - j\sin t)\right\} =$$

$$= e^{-6t}(3\cos t - 8\sin t);$$

$$x_2 = e^{-6t}\left\{\frac{-11-5j}{2j}(\cos t + j\sin t) + \frac{11-5j}{2j}(\cos t - j\sin t)\right\} =$$

$$= e^{-6t}(-5\cos t - 11\sin t).$$

3. Oldjuk meg az alábbi lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5e^t;$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \qquad -2e^{-3t};$$
$$\dot{x}_3 = \qquad 4x_2 + x_3 + 6e^{2t}.$$

Kezdeti feltételek: $t = 0$-nál $x_1 = 5$; $x_2 = -4$; $x_3 = 1$.

Matrix alakban:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5e^t\\ -2e^{-3t}\\ 6e^{2t}\end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}5\\ -4\\ 1\end{bmatrix},$$

vagy röviden: $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t).$$

Először a homogén egyenletet oldjuk meg. Ennek az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}(0).$$

$e^{\mathbf{A}t}$ — t a már ismert módon számítjuk:

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-3 & -4 & 2\\ -3 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1) +$$

$$+ 3(4\lambda + 4 + 8) = (\lambda-3)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) + 3(-4\lambda + 12) =$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 - \lambda + 30 = 0.$$

Ennek gyökei: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 5$.

A Lagrange-polinomok:

$$L_1(\lambda) = \frac{(\lambda-3)(\lambda-5)}{(-5)(-7)} = \frac{1}{35}(\lambda^2 - 8\lambda + 15);$$

$$L_2(\lambda) = \frac{(\lambda+2)(\lambda-5)}{5\cdot(-2)} = -\frac{1}{10}(\lambda^2 - 3\lambda - 10);$$

$$L_3(\lambda) = \frac{(\lambda+2)(\lambda-3)}{7\cdot 2} = \frac{1}{14}(\lambda^2 - \lambda - 6).$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 12 & -8 \\ 15 & 16 & -6 \\ 12 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{35}(\mathbf{A}^2 - 8\mathbf{A} + 15\mathbf{E}) = \frac{1}{35}\left(\begin{bmatrix} 21 & 12 & -8 \\ 15 & 16 & -6 \\ 12 & 12 & 1 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + 15\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 12 & -20 & 8 \\ -9 & 15 & -6 \\ 13 & -20 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}[3, \quad -5, \quad 2].$$

$$L_2(\mathbf{A}) = -\frac{1}{10}(\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{E}) = -\frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 21 & 12 & -8 \\ 15 & 16 & -6 \\ 12 & 12 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -6 \\ 12 & 0 & -12 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}[1, \quad 0, \quad -1].$$

$$L_3(\mathbf{A}) = \frac{1}{14}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 6\mathbf{E}) = \frac{1}{14}\left(\begin{bmatrix} 21 & 12 & -8 \\ 15 & 16 & -6 \\ 12 & 12 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 12 & 8 & -6 \\ 12 & 8 & -6 \\ 12 & 8 & -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[6, \quad 4, \quad -3].$$

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-2t}L_1(\mathbf{A}) + e^{3t}L_2(\mathbf{A}) + e^{5t}L_3(\mathbf{A}) =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{35}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}[3, \quad -5, \quad 2] - \frac{e^{3t}}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}[1, \quad 0, \quad -1] + \frac{e^{5t}}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[6, \quad 4, \quad 3].$$

A homogén egyenletnek az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}(0)=\frac{e^{-2t}}{35}\begin{bmatrix}4\\-3\\4\end{bmatrix}[3,\ -5,\ 2]\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}-\frac{e^{3t}}{5}\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}[1,\ 0,\ -1]\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{e^{5t}}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[6,\ 4,\ -3]\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}=\frac{37}{35}e^{-2t}\begin{bmatrix}4\\-3\\4\end{bmatrix}-$$

$$-\frac{4}{5}e^{3t}\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}+\frac{11}{7}e^{5t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Az inhomogén egyenlet azon partikuláris megoldása, amely az $\mathbf{x}(0)=0$ kezdeti feltételnek tesz eleget:

$$e^{\mathbf{A}t}\int_0^t(e^{\mathbf{A}t})^{-1}f(\tau)\,d\tau.$$

$e^{\mathbf{A}t}$ reciprokának kiszámítása igen egyszerű. Ugyanis skalároknál:

$$(e^{tx})^{-1}=(e^{-t})^{x}.$$

Mivel $e^{\mathbf{A}t}$ kifejezésében csak $\mathbf{A}$ hatványai szerepelnek s ezek szorzás szempontjából egymással felcserélhetők, ezért ez a skalárazonosság akkor is érvényes, ha x helyébe az $\mathbf{A}$ matrixot írjuk:

$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1}=(e^{-t})^{\mathbf{A}},$$

vagyis $e^{\mathbf{A}t}$ kifejezésébe t helyett $-t$ írandó. Tehát:

$$e^{-\mathbf{A}t}=\frac{e^{2t}}{35}\begin{bmatrix}4\\-3\\4\end{bmatrix}[3,\ -5,\ 2]-\frac{e^{-3t}}{5}\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}[1,\ 0,\ -1]+$$

$$+\frac{e^{-5t}}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[6,\ 4,\ -3].$$

Az integrálandó a következő lesz:

$$(e^{\mathbf{A}\tau})^{-1}\mathbf{f}(\tau) = \frac{e^{2\tau}}{35}\begin{bmatrix}4\\-3\\4\end{bmatrix}[3,\ -5,\ 2]\begin{bmatrix}5e^{\tau}\\-2^{-3\tau}\\6e^{2\tau}\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{e^{-3\tau}}{5}\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}[1,\ 0,\ -1]\begin{bmatrix}5e^{\tau}\\-2e^{-\tau}\\6e^{2\tau}\end{bmatrix} + \frac{e^{-5\tau}}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[6,\ 4,\ -3]\begin{bmatrix}5e^{\tau}\\-2e^{-3\tau}\\6e^{2\tau}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{35}(15e^{3\tau} + 10e^{-\tau} + 12e^{4\tau})\begin{bmatrix}4\\-3\\4\end{bmatrix} - \frac{1}{5}(5e^{-2\tau} - 6e^{-\tau})\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{7}(30e^{-4\tau} - 8e^{-8\tau} - 18e^{-3\tau})\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Elvégezzük az integrálást:

$$\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{35}(5e^{3t} - 10^{-}e^{t} + 3e^{4t} + 2)\begin{bmatrix}4\\-4\\3\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{5}(-2{,}5e^{-2t} + 6e^{-t} - 3{,}5)\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} + \frac{1}{7}(-7{,}5e^{-4t} + e^{-8t} + 6e^{-3t} + 0{,}5)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Ezt balról szorozni kell $e^{\mathbf{A}t}$-vel. Ha $e^{\mathbf{A}t}$ kanonikus alakjával végezzük a szorzást, akkor az ortogonalitási tulajdonság miatt három tag kivételével mindegyik zérus lesz. A megmaradó három tagot úgy nyerjük, hogy $e^{\mathbf{A}t}$ első diádját a fenti oszlopvektor első tagjával, a második diádot a második taggal s végül a harmadik diádot a harmadik taggal szorozzuk meg:

$$e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{f}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{35}(5e^{t} - 10e^{-3t} + 3e^{2t} + 2e^{-2t})\begin{bmatrix}4\\-3\\4\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{5}(-2{,}5e^{t} + 6e^{2t} - 3{,}5e^{3t})\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} + \frac{1}{7}(-7{,}5e^{t} + e^{-3t} + 6e^{2t} + 0{,}5e^{t})\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Ez az inhomogén egyenlet azon partikuláris megoldása, amely az $\mathbf{x}(0) = 0$ kezdeti feltételnek tesz eleget. Hogy az eredeti feladat adott kezdeti feltételt kielégítő megoldását megkapjuk, ehhez hozzá kell adni a homogén egyenlet adott kezdeti feltételt kielégítő megoldását:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0 e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{f}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{35}(5e^t - 10e^{-3t} + 3e^{2t} + 39e^{-2t})\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{5}(2{,}5e^t - 6e^{2t} - 0{,}5e^{3t})\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}(-7{,}5e^t + e^{-3t} + 6e^{2t} + 11{,}5e^t)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az összevonásokat elvégezve, a következő oszlopvektort kapjuk:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -e^{-3t} + \frac{156}{35}e^{-2t} - 0{,}1e^{3t} + \frac{11{,}5}{7}e^{5t} \\ e^{-3t} - 3e^{2t} - \frac{117}{35}e^{-2t} - 0{,}3e^{3t} + \frac{11{,}5}{7}e^{5t} \\ 2{,}5e^t - e^{-3t} - 6e^{2t} + \frac{156}{35}e^{-2t} - 0{,}6e^{3t} + \frac{11{,}5}{7}e^{5t} \end{bmatrix}.$$

A végeredmény skalár alakja:

$$x_1 = \frac{156}{35}e^{-2t} - \frac{1}{10}e^{3t} + \frac{23}{14}e^{5t} - e^{-3t};$$

$$x_2 = -\frac{117}{35}e^{-2t} - \frac{3}{10}e^{3t} + \frac{23}{14}e^{5t} + e^{-3t} - 3e^{2t};$$

$$x_3 = \frac{156}{35}e^{-2t} - \frac{6}{10}e^{3t} + \frac{23}{14}e^{5t} - e^{-3t} - 6e^{2t} + 2{,}5e^t.$$

4. Oldjuk meg az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert az adott kezdeti feltételekkel:

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + 5x_2 + 2e^t; \qquad x_1(0) = 1;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2 - 4e^t; \qquad x_2(0) = 3.$$

A feladat matrix alakban:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + e^t\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}; \qquad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A homogén rendszer megoldásánál az $e^{\mathbf{A}t}$ matrixot határozzuk meg, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -5 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2j.$$

$$L_1(\lambda) = \frac{\lambda - (5 - 2j)}{(5 + 2j) - (5 - 2j)} = \frac{1}{4j}(\lambda - 5 + 2j);$$

$$L_2(\lambda) = \frac{\lambda - (5 + 2j)}{-4j} = -\frac{1}{4j}(\lambda - 5 - 2j).$$

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{4j}\{\mathbf{A} + (-5 + 2j)\,\mathbf{E}\} = \frac{1}{4j}\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + (-5 + 2j)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{4j}\begin{bmatrix} 1 + 2j & 5 \\ -1 & -1 + 2j \end{bmatrix} = \frac{1}{4j} \cdot \frac{1}{1 + 2j}\begin{bmatrix} 1 + 2j \\ -1 \end{bmatrix}[1 + 2j,\ 5];$$

$$L_2(\mathbf{A}) = -\frac{1}{4j}\{\mathbf{A} + (-5 - 2j)\,\mathbf{E}\} = -\frac{1}{4j}\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + (-5 - 2j)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4j}\begin{bmatrix} 1 - 2j & 5 \\ -1 & -1 - 2j \end{bmatrix} = -\frac{1}{4j} \cdot \frac{1}{1 - 2j}\begin{bmatrix} 1 - 2j \\ -1 \end{bmatrix}[1 - 2j,\ 5].$$

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t}L_1(\mathbf{A}) + e^{\lambda_2 t}L_2(\mathbf{A}) =$$

$$= \frac{e^{(5+2j)t}}{-8 + 4j}\begin{bmatrix} 1 + 2j \\ -1 \end{bmatrix}[1 + 2j,\ 5] - \frac{e^{(5-2j)t}}{8 + 4j}\begin{bmatrix} 1 - 2j \\ -1 \end{bmatrix}[1 - 2j,\ 5].$$

A homogén egyenlet adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}(0) =$$

$$= \left(\frac{e^{(5+2j)t}}{-8 + 4j}\begin{bmatrix} 1 + 2j \\ -1 \end{bmatrix}[1 + 2j,\ 5] - \frac{e^{(5-2j)t}}{8 + 4j}\begin{bmatrix} 1 - 2j \\ -1 \end{bmatrix}[1 - 2j,\ 5]\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{5t}\left(\frac{16 + 2j}{-8 + 4j}(\cos 2t + j\sin 2t)\begin{bmatrix} 1 + 2j \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{16 - 2j}{8 + 4j}(\cos 2t - j\sin 2t)\begin{bmatrix} 1 - 2j \\ -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= e^{5t}\left(-\frac{1}{2}(3 + 2j)(\cos 2t + j\sin 2t)\begin{bmatrix} 1 + 2j \\ -1 \end{bmatrix} -\right.$$

$$-\frac{1}{2}(3-2j)\,(\cos 2t - j\sin 2t)\begin{bmatrix}1-2j\\-1\end{bmatrix}\Bigg) =$$

$$= \frac{e^{5t}}{2}\left((\cos 2t + j\sin 2t)\begin{bmatrix}1-8j\\3+2j\end{bmatrix} + (\cos 2t - j\sin 2t)\begin{bmatrix}1+8j\\3-2j\end{bmatrix}\right) =$$

$$= e^{5t}\begin{bmatrix}\cos 2t + 8\sin 2t\\3\cos 2t - 2\sin 2t\end{bmatrix}.$$

Az inhomogén egyenletnek az $\mathbf{x}(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását az

$$e^{\mathbf{A}t}\int_0^t (e^{\mathbf{A}\tau})^{-1}\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau$$

kifejezés szolgáltatja. Előző példában láttuk, hogy

$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = (e^{-t})^{\mathbf{A}}$$

és így:

$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = \frac{1}{-8+4j}\,e^{-(5+2j)t}\begin{bmatrix}1+2j\\-1\end{bmatrix}[1+2j,\quad 5] -$$

$$-\frac{1}{8+4j}\,e^{-(5-2j)t}\begin{bmatrix}1-2j\\-1\end{bmatrix}[1-2j,\quad 5].$$

Az integrálandó:

$$(e^{\mathbf{A}\tau})^{-1}\,\mathbf{f}(\tau) = \left(\frac{1}{-8+4j}\,e^{-(5+2j)\tau}\begin{bmatrix}1+2j\\-1\end{bmatrix}[1+2j,\quad 5] -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{8+4j}\,e^{-(5-2t)\tau}\begin{bmatrix}1-2j\\-1\end{bmatrix}[1-2j,\quad 5]\right)\cdot e^{t}\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-18+4j}{-8+4j}\,e^{(-4-2j)\tau}\begin{bmatrix}1+2j\\-1\end{bmatrix} - \frac{-18-4j}{8+4j}\,e^{(-4+2j)\tau}\begin{bmatrix}1-2j\\-1\end{bmatrix}.$$

Az integrálást elvégezve:

$$\int_0^t (e^{\mathbf{A}\tau})^{-1}\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau = \frac{9-2j}{4-2j}\,\frac{1}{-4-2j}\,(e^{(-4-2j)t}-1)\begin{bmatrix}1+2j\\-1\end{bmatrix} +$$

$$+\frac{9+2j}{4+2j}\,\frac{1}{-4+2j}\,(e^{(-4-2j)t}-1)\begin{bmatrix}1-2j\\-1\end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{9-2j}{20}(e^{(-4-2j)t}-1)\begin{bmatrix}1+2j\\-1\end{bmatrix} - \frac{9+2j}{20}(e^{(-4+2j)t}-1)\begin{bmatrix}1-2j\\-1\end{bmatrix}.$$

Balról $e^{\mathbf{A}t}$-vel szorozva nyerjük az inhomogén egyenlet keresett partikuláris megoldását. A szorzás elvégzése a Lagrange-polinomokkal igen egyszerű (lásd előző példát):

$$e^{\mathbf{A}t}\int_0^t (e^{\mathbf{A}\tau})^{-1}\mathbf{f}(\tau)\,d\tau = -\frac{9-2j}{20}(e^t - e^{(5+2j)t})\begin{bmatrix}1+2j\\-1\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{9+2j}{20}(e^t - e^{(5-2j)t})\begin{bmatrix}1-2j\\-1\end{bmatrix} = -\frac{e^t}{10}\begin{bmatrix}13\\-9\end{bmatrix} + \frac{e^{5t}}{10}\begin{bmatrix}13\cos 2t - 16\sin 2t\\-9\cos 2t - 2\sin 2t\end{bmatrix}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszernek az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása tehát:

$$\mathbf{x} = e^{5t}\begin{bmatrix}\cos 2t + 8\sin 2t\\3\cos 2t - 2\sin 2t\end{bmatrix} - \frac{e^t}{10}\begin{bmatrix}13\\-9\end{bmatrix} + \frac{e^{5t}}{10}\begin{bmatrix}13\cos 2t - 16\sin 2t\\-9\cos 2t - 2\sin 2t\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^{5t}}{10}\begin{bmatrix}23\cos 2t + 64\sin 2t\\21\cos 2t - 22\sin 2t\end{bmatrix} - \frac{e^t}{10}\begin{bmatrix}13\\-9\end{bmatrix}.$$

b) Műszaki alkalmazások

α) Rögzített tengely körüli forgást leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldása a matrixszámítás segítségével

Ha egy merev test az origón átmenő rögzített és c_1, c_2, c_3 iránykoszinuszokkal bíró tengely körül ω szögsebességgel forog, akkor — miként a mechanikából ismeretes — a forgó test valamely $\mathbf{r}$ hejezetvektorú, azaz x, y, z koordinátákkal bíró pontjának $\mathbf{v}$ sebességvektorát (a közönséges vektoralgebra szerinti írásmóddal) a következő képlet adja: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Itt $\boldsymbol{\omega}$ a zszögsebességi vektort jelenti, annak iránya tehát egybeesik a forgástengellyel, hosszúságának mérőszáma pedig megegyezik a szögsebesség radián/szekundum-ban megadott mérőszámával.

A $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ képletben szereplő vektorszorzatot a matrixalgebra jeleivel — miként azt a II. rész, 5, §-ban láttuk — csak oly módon tudjuk kifejezni, hogy az egyik tényezőt, jelen esetben az $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$ szögsebességi vektort, egy harmadrendű ferdén szimmetrikus matrix alakjában írjuk:

$$\omega\begin{bmatrix}0 & -c_3 & c_2\\ c_3 & 0 & -c_1\\ -c_2 & c_1 & 0\end{bmatrix} = \omega\mathbf{C}.$$

Minthogy a c_1, c_2, c_3 a forgástengely iránykoszinuszait jelentik, ezért azok négyzetösszege 1-gyel egyenlő. Minthogy a **v** sebességi vektor nem egyéb, mint az **r** helyzetvektornak az idő szerinti deriváltja, azaz $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$, tehát matrix alakban írva, a merev test forgását leíró differenciálegyenlet a következő alakot ölti:

$$\dot{\mathbf{r}} = \omega \mathbf{C} \mathbf{r}, \tag{7.32}$$

azaz részletesen:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{7.33}$$

Az

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{7.34}$$

kezdeti feltétel megadása ez esetben azt jelenti, hogy a $t = 0$ időpillanatban kijelöljük a testnek egy

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

helyzetvektorú pontját és ennek a pontnak az időben bekövetkező helyzetváltozását vizsgáljuk. A 7. § *a) α)* I° szerint a (7.32) differenciálegyenletnek a (7.34) kezdeti feltételt kielégítő megoldása mint a t időnek és az $\mathbf{r}_0$ vektornak a függvénye:

$$\mathbf{r}(t;\ \mathbf{r}_0) = e^{\mathbf{C}\omega t} \cdot \mathbf{r}_0. \tag{7.35}$$

Az ebben a megoldásban szereplő matrixfüggvényt a **C** matrix karakterisztikus (és egyszersmind minimál) egyenlete segélyével fogjuk másodfokú matrixpolinomra redukálni.

A **C** matrix karakterisztikus (és egyidejűleg minimál) egyenlete:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & \lambda & c_1 \\ c_2 & -c_1 & \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^3 + \lambda (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = 0. \tag{7.36}$$

Azonban a fentiek szerint $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, tehát a karakterisztikus egyenlet a következő egyszerű alakban írható:

$$\lambda^3 = -\lambda. \tag{7.37}$$

Minthogy pedig a Hamilton—Cayley-tétel szerint bármely matrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét, tehát

$$\mathbf{C}^3 = -\mathbf{C}. \tag{7.38}$$

A megoldásban szereplő $e^{\mathbf{C}\omega t}$ matrix függvényt a következő hatványsorral van definiálva:

$$e^{\mathbf{C}\omega t} = \mathbf{E} + \mathbf{C}\omega t + \frac{1}{2!}\mathbf{C}^2\omega^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{C}^3\omega^3 t^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{C}^4\omega^4 t^4 + \ldots \tag{7.39}$$

Az itt előforduló, másodiknál magasabb hatványok a karakterisztikus (minimál) egyenlet segítségével a következőképpen redukálódnak:

$$(7.40)\qquad \begin{cases} \mathbf{C}^3 = -\mathbf{C}; & \mathbf{C}^4 = -\mathbf{C}^2 \\ \mathbf{C}^5 = \mathbf{C}; & \mathbf{C}^6 = \mathbf{C}^2 \\ \mathbf{C}^7 = -\mathbf{C}; & \mathbf{C}^8 = -\mathbf{C}^2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}^{2n+1} = (-1)^n \mathbf{C}; & \mathbf{C}^{2n+2} = (-1)^n \mathbf{C}^2. \end{cases}$$

Ha $\mathbf{C}$ hatványainak ezen értékeit a (7.39) hatványsorba behelyettesítjük, azt nyerjük, hogy

$$(7.41)\qquad \begin{aligned} e^{\mathbf{C}\omega t} &= \mathbf{E} + \mathbf{C}\omega t + \frac{1}{2!}\mathbf{C}^2\omega^2 t^2 - \frac{1}{3!}\mathbf{C}\omega^3 t^3 - \frac{1}{4!}\mathbf{C}^2\omega^4 t^4 + \\ &+ \frac{1}{5!}\mathbf{C}\omega^5 t^5 + \frac{1}{6!}\mathbf{C}^2\omega^6 t^6 - + \ldots = \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{C}\left\{\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} - + \ldots\right\} + \\ &+ \mathbf{C}^2\left\{\frac{\omega^2 t^2}{2!} - \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \frac{\omega^6 t^6}{6!} - + \ldots\right\}. \end{aligned}$$

A zárójelekben levő hatványsorokról nyomban felismerhető, hogy

$$\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} - + \ldots = \sin \omega t,$$

$$\frac{\omega^2 t^2}{2!} - \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \frac{\omega^6 t^6}{6!} - + \ldots = 1 - \cos \omega t.$$

Eszerint a (7.32) differenciálegyenletnek redukált megoldó képlete:

$$(7.42)\qquad \mathbf{r} = \{\mathbf{E} + \mathbf{C}\sin \omega t + \mathbf{C}^2 (1 - \cos \omega t)\}\ \mathbf{r}_0.$$

Ha — miután előbb $\mathbf{C}^2$-et kiszámítottuk — a megoldásban szereplő matrixokat részletesen kiírjuk skalárelemeikkel, akkor azt kapjuk, hogy

$$(7.43)\qquad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \sin \omega t + \right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} -(c_2^2 + c_3^2) & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & -(c_1^2 + c_3^2) & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & -(c_1^2 + c_2^2) \end{bmatrix} (1 - \cos \omega t) \right\} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Minthogy egyenletes szögsebesség esetén ωt egyenlő az elfordulási szöggel, tehát a részletes skalár alakban kiírt egyenletek megadják, hogy a térnek egy tetszőleges

x_0, y_0, z_0 koordinátákkal bíró pontja c_1, c_2, c_3 iránykoszinuszokkal bíró tengely körüli ωt szöggel való elfordulás után milyen helyzetbe kerül. Bevezetve az $\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$ jelölést, a (7.43) képletet még így is írhatjuk:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + (\mathbf{E} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) \cos \omega t + \mathbf{C} \cdot \sin \omega t\} \mathbf{x}_0.$$

β) Közös, rugalmas tengelyhez rögzített tárcsák torziós lengései

Egyenletes C torziós merevségű tengelyre, egymástól L távolságra három egyenlő, J tehetetlenségi nyomatékú tárcsa van szerelve. A tengelyvégek szabadok (súrlódásmentesen csapágyazottak). E rendszer torziós lengéseinek differenciálegyenlet-rendszere a következőképpen állítható fel:

Jelöljük a tárcsáknak (feszültségmentes helyzeteiktől mért) elfordulási szögeit φ_1, φ_2, illetőleg φ_3-mal. Ekkor az első és második tárcsa közti L hosszúságú tengelydarab elcsavarodási szöge $\varphi_2 - \varphi_1$, tehát a fellépő csavaró nyomaték $\frac{C}{L}(\varphi_2 - \varphi_1)$, és így az első tárcsa mozgásegyenlete:

$$J\ddot{\varphi}_1 = \frac{C}{L}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Hasonlóan adódnak a többi tárcsák mozgásegyenletei is:

$$J\ddot{\varphi}_2 = \frac{C}{L}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{C}{L}(\varphi_3 - \varphi_2),$$

$$J\ddot{\varphi}_3 = \frac{C}{L}(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Ha a ($\sec^{-2}$ dimenziójú) $\frac{C}{JL}$ mennyiséget $\varkappa$-val jelöljük, akkor a lengések differenciálegyenlet-rendszere matrix alakban a következőképpen írható:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix} + \varkappa\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix} = 0; \tag{7.44}$$

illetőleg bevezetve a

$$\varphi = \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}, \tag{7.45}$$

továbbá az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \tag{7.46}$$

oszlop-, illetőleg kvadratikus matrixokat:

$$\ddot{\varphi} + \varkappa \mathbf{A}\varphi = 0. \tag{7.47}$$

Tetszés szerint előírhatók a következő kezdeti feltételek:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \\ \varphi_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ \varphi_{30} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1(0) \\ \dot{\varphi}_2(0) \\ \dot{\varphi}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{10} \\ \dot{\varphi}_{20} \\ \dot{\varphi}_{30} \end{bmatrix}; \tag{7.48}$$

illetőleg

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{és} \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0. \tag{7.49}$$

A (7.47) differenciálegyenletnek a (7.49) kezdőfeltételeket kielégítő megoldása a (7.23) egyenlet szerint:

$$\varphi(t;\ \varphi_0, \dot{\varphi}_0) = \cos\sqrt{\varkappa \mathbf{A}}t \cdot \varphi_0 + \frac{\sin\sqrt{\varkappa \mathbf{A}}t}{\sqrt{\varkappa \mathbf{A}}}\dot{\varphi}_0. \tag{7.50}$$

Ahhoz, hogy ebből a tömör megoldási formulából a numerikus számításra is alkalmas megoldáshoz jussunk, az itt szereplő matrixfüggvényeket kanonikus alakjukra kell hoznunk. Az I. rész (4.32) egyenlet szerint

$$\cos\sqrt{\varkappa \mathbf{A}}t = \sum_{k=1}^{3} \cos\sqrt{\varkappa\lambda_k}t L_k(\mathbf{A});\quad \frac{\sin\sqrt{\varkappa \mathbf{A}}t}{\sqrt{\varkappa \mathbf{A}}} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\sin\sqrt{\varkappa\lambda_k}t}{\sqrt{\varkappa\lambda_k}} L_k(\mathbf{A}),$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ az

$$|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| \equiv \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \equiv +\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. Könnyen felismerhetők, hogy ezek a gyökök:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Miután a gyökök mind egyszeresek, a karakterisztikus egyenlet megegyezik a minimál egyenlettel, tehát az $L_1(\mathbf{A}), L_2(\mathbf{A}), L_3(\mathbf{A})$ matrixok mindegyike egy-egy diádra fog redukálódni.

Az $L_1(\lambda)$ másodfokú polinom a λ_1 helyen 1 értéket, a λ_2 és λ_3 helyeken a 0 értéket tartozik felvenni, tehát:

$$L_1(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 3)}{(0 - 1)(0 - 3)} = \frac{1}{3}(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

Innen

$$L_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 3\mathbf{E}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}[1,\ 1,\ 1] = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^*.$$

Hasonlóképpen adódnak:

$$L_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(3\mathbf{A} - \mathbf{A}^2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[1,\ 0,\ -1] = \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^*$$

és

$$L_3(\mathbf{A}) = \frac{1}{6}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}[1,\ -2,\ 1] = \mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^*.$$

Könnyen felismerhető, hogy az így nyert $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ sajátvektorok kielégítik az

$$\mathbf{u}_i^*\mathbf{u}_j = 0, \text{ ha } i \neq j,$$

illetve

$$\mathbf{u}_i^*\mathbf{u}_i = 1$$

ortogonalitási relációkat.

Az ily módon nyert sajátvektorok felhasználásával a $\cos\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}t$, illetve a $\dfrac{\sin\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}t}{\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}}$ matrixfüggvények kanonikus alakja:

$$\cos\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}t = \cos\sqrt{\varkappa\lambda_1}t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^* + \cos\sqrt{\varkappa\lambda_2}t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^* + \cos\sqrt{\varkappa\lambda_3}t\mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^*;$$

$$\frac{\sin\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}t}{\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}} = \frac{\sin\sqrt{\varkappa\lambda_1}t}{\sqrt{\varkappa\lambda_1}}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^* + \frac{\sin\sqrt{\varkappa\lambda_2}t}{\sqrt{\varkappa\lambda_2}}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^* + \frac{\sin\sqrt{\varkappa\lambda_3}t}{\sqrt{\varkappa\lambda_3}}\mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^*;$$

illetőleg a λ_k sajátértékek és az $\mathbf{u}_k$ sajátvektorok behelyettesítése után

$$\cos\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] + \cos\sqrt{\varkappa}t\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] +$$

$$+ \cos\sqrt{\varkappa}3t\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]; \tag{7.51}$$

$$\frac{\sin\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}t}{\sqrt{\varkappa\mathbf{A}}} = t\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] + \frac{\sin\sqrt{\varkappa}t}{\sqrt{\varkappa}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] +$$

$$+ \frac{\sin\sqrt{3\varkappa}\,t}{\sqrt{3\varkappa}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]. \tag{7.52}$$

Ezek felhasználásával a (7.50) megoldási formula a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}\varphi(t;\varphi_0,\dot{\varphi}_0) &= \mathbf{u}_1\{(\mathbf{u}_1^*\varphi_0) + (\mathbf{u}_1^*\dot{\varphi}_0)\,t\} + \\ &+ \mathbf{u}_2\left\{(\mathbf{u}_2^*\varphi_0)\cos\sqrt{\varkappa}\,t + (\mathbf{u}_2^*\dot{\varphi}_0)\frac{\sin\sqrt{\varkappa}\,t}{\sqrt{\varkappa}}\right\} + \\ &+ \mathbf{u}_3\left\{(\mathbf{u}_3^*\varphi_0)\cos\sqrt{3\varkappa}\,t + (\mathbf{u}_3^*\dot{\varphi}_0)\frac{\sin\sqrt{3\varkappa}\,t}{\sqrt{3\varkappa}}\right\}.\end{aligned} \tag{7.53}$$

Ebből a megoldásból a normál lengések jelentősége és szerepe könnyen leolvasható.

Ha ugyanis a φ_0 és $\dot{\varphi}_0$ kezdő vektorok elemei — a tárcsák kezdeti elfordulásai és szögsebességei — az $\mathbf{u}_1$ sajátvektor elemeivel arányosak, tehát egymás közt egyenlőek, akkor a (7.53) összeg második és harmadik tagja az ortogonalitási relációk következtében eltűnik. Ez esetben tehát a megoldás:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\{\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)\,t\}.$$

Ez a $\lambda_1 = 0$ sajátértéknek megfelelő megoldás nem lengés, hanem a csavarodásmentes rendszernek állandó szögsebességgel történő forgása.

Ha a φ_0 és $\dot{\varphi}_0$ kezdeti vektorok elemei (a tárcsák kezdeti elfordulásai és szögsebességei) az $\mathbf{u}_2$ sajátvektor elemeivel arányosak, akkor az (7.53) összeg első és harmadik tagja tűnik el, és a megoldás:[19]

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \varphi_3(t)\end{bmatrix} = K\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\cos\,(\sqrt{\varkappa}\,t + \psi).$$

[19] Itt a K és ψ a megadott kezdeti helyzettől függő konstansok.

Eszerint a tárcsák $\sqrt{\varkappa}$ frekvenciával szinkron (közös fázisú) lengéseket végeznek, éspedig a középső tárcsa nyugszik, a szélsők kilengései pedig mindegyik pillanatban ellentetten egyenlők. Ezt a mozgási állapotot a rendszer első normál rezgésének nevezzük; $\sqrt{\varkappa}$ az első sajátfrekvencia.

Ha végül φ_0 és $\dot{\varphi}_0$ elemei $\mathbf{u}_3$ elemeivel arányosak, akkor az összeg első két tagja tűnik el, és a megoldás:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\,(\sqrt{3\varkappa}\,t + \psi).$$

A tárcsák ekkor is szinkron lengéseket végeznek, éspedig a szélső tárcsák kilengései minden pillanatban egyenlőek, a középső tárcsa kilengése pedig a szélső kilengésének -2-szerese. Ez a mozgási állapot a rendszer ún. második normálrezgése; $\sqrt{3\varkappa}$ a második sajátfrekvencia.

A tetszőleges kezdeti feltételeknek megfelelő mozgás az állandó szögsebességű forgásból és a két normál rezgésből a (7.53) képlet által megadott módon szuperponálódik.

γ) Tranziens elektromágneses folyamatok matematikai leírása a matrixszámítás segítségével

I°. Több induktíve és kapacitíve csatolt rezgőkör tranziens folyamatait leíró differenciálegyenlet-rendszer matrix alakja. Több, külön-külön egy-egy sorbakapcsolt ohmikus ellenállásból, induktív tekercsből és kondenzátorból álló ún. „rezgőkör" egy „induktíve és kapacitíve csatolt" áramkörrendszert alkot, amelynek matematikai leírása általában egy állandó együtthatós, lineáris, másodrendű inhomogén differenciálegyenlet-rendszer megoldását teszi szükségessé, speciális esetekben pedig lineáris algebrai egyenletrendszerekre vezet. A matrixszámítás alkalmazása lehetővé teszi, hogy számos, a műszaki gyakorlat szempontjából érdekes esetben a differenciálegyenlet-rendszer, illetve algebrai egyenletrendszer megoldását egyetlen, egy ismeretlen függvényt tartalmazó differenciálegyenlet, illetve egyetlen, egyismeretlenes algebrai egyenlet megoldására vezessük vissza.

Jelöljük valamely, n számú induktíve és kapacitíve csatolt rezgőkörből álló rendszer jellemző állandóit a következőképpen:

R_k — a k-adik rezgőkör ohmikus ellenállása;

L_{kk} — a k-adik rezgőkör tekercsének öninduktivitása;

L_{kl} — a k-adik és l-edik rezgőkörök tekercsei közötti kölcsönös induktivitás;

C_{kk} — a k-adik rezgőkör kondenzátorának kapacitása;

C_{kl} — a k-adik és l-edik rezgőkörök kondenzátorai közötti kölcsönös kapacitás.

Jelöljük továbbá a k-adik rezgőkörben folyó áramerősséget i_k-val, és a k-adik rezgőkör (az ohmikus, induktív és kapacitív ellenállásokkal sorbakapcsolt) elektromotoros erejét u_k-val. Ebben az esetben az ún. „második Kirchhoff-féle törvény" általános alakjának felhasználásával a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$(7.54)\quad \begin{cases} R_1 i_1 + L_{11}\dfrac{d}{dt} i_1 + \ldots + L_{1n}\dfrac{d}{dt} i_n + \dfrac{1}{C_{11}}\displaystyle\int_0^t i_1\,dt + \ldots + \dfrac{1}{C_{1n}}\int_0^t i_n\,dt = u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n i_n + L_{n1}\dfrac{d}{dt} i_1 + \ldots + L_{nn}\dfrac{d}{dt} i_n + \dfrac{1}{C_{n1}}\displaystyle\int_0^t i_1\,dt + \ldots + \dfrac{1}{C_{nn}}\int_0^t i_n\,dt = u_n. \end{cases}$$

Ha ezen egyenletrendszer mindegyik egyenletének mind a jobb, mind a bal oldalát a t változó szerint differenciáljuk, nyerjük, hogy

$$(7.55)\quad \begin{cases} R_1 \dfrac{d}{dt} i_1 + L_{11}\dfrac{d^2}{dt^2} i_1 + \ldots + L_{1n}\dfrac{d^2}{dt^2} i_n + \dfrac{1}{C_{11}} i_1 + \ldots + \dfrac{1}{C_{1n}} i_1 = \dfrac{d}{dt} u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n \dfrac{d}{dt} i_n + L_{n1}\dfrac{d^2}{dt^2} i_1 + \ldots + L_{nn}\dfrac{d^2}{dt^2} i_n + \dfrac{1}{C_{n1}} i_1 + \ldots + \dfrac{1}{C_{nn}} i_n = \dfrac{d}{dt} u_n. \end{cases}$$

Vezessük be most a következő matrixokat:

Oszlopmatrixok:

$$(7.56)\quad \begin{cases} \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_1(0) \\ \vdots \\ i_n(0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_0' = \begin{bmatrix} i_1'(0) \\ \vdots \\ i_n'(0) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_0' = \begin{bmatrix} u_1'(0) \\ \vdots \\ u_n'(0) \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Kvadratikus matrixok:

$$(7.57)\quad \begin{cases} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_n \end{bmatrix} = \langle R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle; \\ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_{11}} & \dfrac{1}{C_{12}} & \ldots & \dfrac{1}{C_{1n}} \\ \dfrac{1}{C_{21}} & \dfrac{1}{C_{22}} & \ldots & \dfrac{1}{C_{2n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{1}{C_{n1}} & \dfrac{1}{C_{n2}} & \ldots & \dfrac{1}{C_{nn}} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

E matrixok segítségével a (7.54), illetve (7.55) egyenletrendszerek a következő matrixegyenletekké foglalhatók össze:

$$\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{i} + \int_0 \mathbf{K}\mathbf{i}\,dt = \mathbf{u}; \tag{7.58}$$

illetve

$$\mathbf{L}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i} + \mathbf{R}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{K}\mathbf{i} = \frac{d}{dt}\mathbf{u}. \tag{7.59}$$

Abban az esetben, ha a vizsgált áramkörök csupán ohmikus ellenállást és induktív tekercset tartalmaznak (tehát csupán induktíve vannak csatolva), a (7.58) egyenletbe $\mathbf{K} = 0$ helyettesíthető, és így az

$$\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{u} \tag{7.60}$$

egyenletre jutunk. Ha viszont a vizsgált áramkörök csak ohmikus ellenállásból és kondenzátorból állanak (csak kapacitíve csatolt áramkörök esetén) $\mathbf{L} = 0$, és így a (7.59) egyenletből a

$$\mathbf{R}\frac{d}{dt}\mathbf{i} + \mathbf{K}\mathbf{i} = \frac{d}{dt}\mathbf{u} \tag{7.61}$$

matrixegyenletet nyerjük.

Az alábbi számítások során feltesszük, hogy $\mathbf{u}$ mindegyik áramkörben az időnek ugyanolyan periódusú periodikus $\mathbf{u}(t)$ függvénye.

A levezetett matrix-differenciálegyenletekből kiindulva, adott periodikus $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ esetén a következő feladatok megoldásáról lehet szó:

I. Kereshetjük a (7.59) differenciálegyenletet és az

$$\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0; \qquad \mathbf{i}'(0) = \mathbf{i}'_0 \tag{7.62}$$

kezdeti feltételeket egyidejűleg kielégítő $\mathbf{i}(t)$ függvényt; illetőleg kereshetjük a (7.60) vagy a (7.61) differenciálegyenletet és az

$$\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0 \tag{7.63}$$

kezdeti feltételt egyidejűleg kielégítő $\mathbf{i}(t)$ függvényt.

II. Kereshetjük a (7.59), a (7.60) vagy a (7.61) differenciálegyenlet $\mathbf{u}(t)$-vel megegyező periódusú periodikus megoldását, azaz azt az $\mathbf{i}(t)$ függvényt, amely az áramkörökben a be-, illetőleg kikapcsoláskor fellépő tranziens áramok elhalása után kialakuló áramerősséget a t idő függvényeként leírja, vagyis — az elektrotechnikában használatos kifejezéssel élve — a „stacionárius" áramokat leíró $\mathbf{i}(t)$ függvényt.

Míg az I. feladattípus a differenciálegyenleteknek a 7. § *a)*-ban tárgyalt módokon való megoldását igényeli, addig a II. feladattípus algebrai matrixegyenlet megoldására redukálódik.

Az alábbiakban a következő I. típusú feladatok megoldásával foglalkozunk:

1. az egyfázisú transzformátor bekapcsolásakor lejátszódó jelenség vizsgálatával;

2. három induktíve és kapacitíve csatolt, ciklikus szimmetriával bíró rezgőkör bekapcsolási folyamatának leírásával.

II°. Az egyfázisú transzformátor bekapcsolásánál lejátszódó tranziens folyamat vizsgálata. Jelöljük valamely egyfázisú transzformátor primer tekercsének ohmikus ellenállását r_p-vel és öninduktivitását l_p-vel, továbbá a szekunder tekercs ohmikus ellenállását r_s-sel és öninduktivitását l_s-sel, végül a primer és szekunder tekercsek közötti kölcsönös induktivitást m-mel. Jelöljük továbbá a primer tekercsben folyó áramerősséget i_p-vel, a szekunder tekercsben folyó áramerősséget i_s-sel, és jelöljük a primer tekercs feszültségét u_p-vel, a szekunder tekercs feszültségét pedig u_s-sel. Ez esetben — a (7.54) általános egyenletrendszer alapján — a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\begin{cases} r_p i_p + l_p \dfrac{d}{dt} i_p + m \dfrac{d}{dt} i_s = u_p, \\ r_s i_s + m \dfrac{d}{dt} i_p + l_s \dfrac{d}{dt} i_s = u_s, \end{cases} \tag{7.64}$$

továbbá tetszés szerint előírhatjuk a $t = 0$ pillanatban az i_p és i_s áramerősségek értékét:

$$\begin{cases} i_p(0) = i_{p0} \\ i_s(0) = i_{s0}. \end{cases} \quad \text{és} \tag{7.65}$$

Bevezetve az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_p & m \\ m & l_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_p \\ u_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} \tag{7.66}$$

kvadratikus, illetve oszlopmatrixokat, a fenti differenciálegyenletet, illetve kezdeti feltételt a következő matrixösszefüggésekbe foglalhatjuk össze:

$$\mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i} = \mathbf{u} \tag{7.67}$$

és

$$\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0. \tag{7.68}$$

Annak érdekében, hogy a megoldandó matrix-differenciálegyenletet a 7. § *a)*-ban tárgyalt differenciálegyenlettel megegyező alakra hozzuk, és hogy az abban szereplő kvadratikus matrix valós szimmetrikus matrix legyen, szorozzuk meg (feltéve, hogy $|\mathbf{L}| \neq 0$, azaz $l_p l_s \neq m^2$) a (7.67) egyenletet balról $\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}$-nel:

$$\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{i} + \sqrt{\mathbf{R}} \frac{d}{dt} \mathbf{i} = \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}. \tag{7.69}$$

Az egyenlet bal oldalán még $\mathbf{R}$ helyébe $\sqrt{\mathbf{R}}\sqrt{\mathbf{R}}$-et írva, a jobb oldalon pedig $\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1} = \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}$ helyettesítéssel, továbbá a $\sqrt{\mathbf{R}} \dfrac{d}{dt} \mathbf{i} \equiv \dfrac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}$ azonos-

ságot felhasználva, azt nyerjük, hogy:

$$\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i} + \frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i} = \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{u}. \tag{7.70}$$

Hasonlóképpen átírhatjuk a kezdeti feltételt is; mindkét oldalon $\sqrt{\mathbf{R}}$-rel szorozva az $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$ egyenletből a

$$\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}(0) = \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}_0 \tag{7.71}$$

kezdeti feltételt nyerjük.

Ha most már bevezetjük az $\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}$, $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}$, $\mathbf{g}(t) = \mathbf{A}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{u}(t)$ jelöléseket, a megoldandó differenciálegyenlet, illetve a hozzá tartozó kezdeti feltétel az alábbi módon írható:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{g}(t),$$

illetve:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Tehát — felhasználva a 7. § *a)*-ban levezetett (7.16) megoldási képletet — azt nyerjük, hogy:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0 e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)\,d\tau.$$

Abban az esetben, ha $u_p(t)$ és $u_s(t)$ a t időnek ugyanolyan periodikus függvényei, célszerű e függvényeket $u_p(t) = p_{p0} \cdot e^{j\omega t}$, illetve $u_s(t) = u_{s0} \cdot e^{j\omega t}$ alakban írni, ahol u_{p0}, illetve u_{s0} komplex mennyiségek is lehetnek; a valóban fellépő feszültségek legyenek az $u_{p0} \cdot e^{j\omega t}$, illetve $u_{s0} \cdot e^{j\omega t}$ (valós változójú) komplex függvények *valós* részei; ez esetben az áramerősségeket meghatározó függvények a valós t változónak ugyancsak komplex függvényei lesznek, amelyek valós része szolgáltatja a tényleg fellépő áramokat.

Eszerint

$$(t) = \mathbf{A}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \mathbf{A}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{u}_0 e^{j\omega t} = \mathbf{g}_0 e^{j\omega t},$$

tehát

$$\mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \left\{\int_0^t e^{(\mathbf{A}+j\omega\mathbf{E})\tau}\,d\tau\right\} e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{g}_0,$$

azaz az integrálás elvégzése és kis átalakítása után

$$\mathbf{x} = e^{j\omega t}(j\omega\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{g}_0 + e^{-\mathbf{A}t}\{\mathbf{x}_0 - (j\omega\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{g}_0\}.$$

Minthogy pedig $\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}$, tehát $\mathbf{i} = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{x}$, azaz:

$$\mathbf{i} = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}e^{-\mathbf{A}t}\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}_0 - (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\{\mathbf{A}(j\omega\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E}e^{j\omega t} - e^{-\mathbf{A}t})\}(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{7.72}$$

Mint ismeretes (lásd az I. rész 4. § *b) α)*-t) valamely másodrendű *valós szimmetrikus* **A** matrix bármely $f(\mathbf{A})$ analitikus függvénye

$$f(\mathbf{A}) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix}$$

alakban írható, ahol λ_1, λ_2 az **A** matrix sajátértékei és $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ (nem tévesztendők össze az ugyancsak **u** betűvel jelölt feszültség-oszlopmatrixszal!) pedig az **A** matrix jobb oldali sajátvektorai.

Minthogy

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{adj\,\mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} = \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix},$$

tehát

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}} =$$

$$= \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} r_p l_h & -\sqrt{r_p r_s}\, m \\ -\sqrt{r_p r_s}\, m & r_s l_p \end{bmatrix},$$

eszerint az **A** matrix sajátértékei:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{l_p l_s - m^2} \cdot \frac{r_p l_s + r_s l_p \mp \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}}{2},$$

továbbá az **A** matrix sajátvektorai:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\sigma \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \sigma \\ \gamma \end{bmatrix},$$

ahol

$$\gamma = \cos\varphi; \qquad \sigma = \sin\varphi$$

és

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-2m\sqrt{r_p r_s}}{r_p l_s - r_s l_p}.$$

Tehát, ha $f(\mathbf{A})$ az **A** matrix tetszés szerinti analitikus függvényét jelenti, írhatjuk, hogy

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} f(\mathbf{A}) \sqrt{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) & -\sqrt{\frac{r_s}{r_p}}\,\gamma\sigma\,[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \\ -\sqrt{\frac{r_p}{r_s}}\,\gamma\sigma\,[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] & \sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) \end{bmatrix}.$$

Ez az összefüggés még a következőképpen is írható:

Minthogy

$$\gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1-\cos 2\varphi}{2} f(\lambda_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] + \frac{\cos 2\varphi}{2}[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)];$$

továbbá, mivel

$$\sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} f(\lambda_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] - \frac{\cos 2\varphi}{2}[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)];$$

$$\text{és} \quad \gamma\sigma = \frac{1}{2}\sin 2\varphi, \text{ tehát}$$

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} f(\mathbf{A}) \sqrt{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}\{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{1}{2}\{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\}\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sqrt{\frac{r_s}{r_p}}\sin\varphi \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}}\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\}\frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}}\begin{bmatrix} r_p l_s - r_s l_p & 2 r_s m \\ 2 r_p m & r_s l_p - r_p l_s \end{bmatrix}.$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} f(\mathbf{A}) (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p}(\gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2)) & -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\gamma\sigma\{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\} \\ -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\gamma\sigma\{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\} & \frac{1}{r_s}\{\gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2)\} \end{bmatrix};$$

amely összefüggés a γ, σ és φ között fennálló, fentebb felsorolt identitások figyelembevételével a következőképpen alakítható át:

$$(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} f(\mathbf{A}) (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} = \frac{1}{2}\{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)\}\begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2}\{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\}\begin{bmatrix} -\frac{1}{r_p}\cos\varphi & \frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{r_p r_s}}\sin\varphi & \frac{1}{r_s}\cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{\{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)\}\begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\}\frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{r_p}(r_p l_s - r_s l_p) & 2m \\ 2m & \frac{1}{r_s}(r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix}.$$

A $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} f(\mathbf{A})\sqrt{\mathbf{R}}$, továbbá a $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} f(\mathbf{A}) (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}$ itt levezetett kifejezéseit felhasználva, továbbá a rövidebb és áttekinthetőbb írásmód végett még bevezetve a $d = \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}$ rövidítést, az egyfázisú transzformátor tekercseiben fellépő áramokra a következő matrixösszefüggést nyerjük:

(7.73)
$$\begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Big\{ (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})\frac{1}{d}\begin{bmatrix} r_p l_s & -r_s l_p & 2 r_s m \\ 2 r_p m & r_s l_p - r_s l_p \end{bmatrix}\Big\}\begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Bigg\{\left(\frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_1}(e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2}(e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t})\right)\begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} +$$

$$+ \left(\frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_1}(e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2}(e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t})\right)\frac{1}{d}\begin{bmatrix} \frac{1}{r_p}(r_p l_s - r_s l_p) & 2m \\ 2m & \frac{1}{r_s}(r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix}\Bigg\}\begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}.$$

Abban a speciális esetben, amikor a transzformátor primer és szekunder oldala egyforma, azaz $r_p = r_s = r$ és $l_p = l_s = l$ nyilván[20]

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{l^2 - m^2} \frac{2rl \mp 2rm}{2}; \quad \lambda_1 = \frac{r}{l+m}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{l-m}; \tag{7.74}$$

továbbá

$$d = 2rm$$

Tehát eszerint

$$\begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\left(e^{-\frac{r}{l+m}t} + e^{-\frac{r}{l-m}t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right.$$

$$+ \left(e^{-\frac{r}{l+m}t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\left.\right\}\begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l+m}t}\right) + \right.\right.$$

$$+ \left.\left.\frac{r - j\omega(l-m)}{r^2 + \omega^2(l-m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}\right)\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -\right.$$

$$- \left(\frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l+m}t}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{r - j\omega(l-m)}{r^2 + \omega^2(l-m)^2}\left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t}\right)\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{ps} \end{bmatrix}.$$

d) **Három induktíve és kapacitíve csatolt rezgőkör bekapcsolásánál lejátszódó tranziens folyamat vizsgálata ciklikus szimmetria esetén**

Három, külön-külön egy-egy sorbakapcsolt ohmikus ellenállásból, induktív tekercsből és kondenzátorból felépített rezgőkör akkor alkot ciklikus szimmetriával bíró rendszert, ha mindhárom rezgőkör ohmikus ellenállása, öninduktivitása és kapacitása megegyezik, továbbá a rezgőkörök geometriai elrendezése olyan, hogy bármely két tekercs közötti kölcsönös induktivitás, illetve bármely két kondenzátor közötti kölcsönös kapacitás ugyanazon értékkel bír. Ilyen ciklikus szimmetriával bíró rendszernek tekinthető pl. egy háromfázisú vezetékrendszer, amelynek elhelyezése az ábra szerint történt, és amely olyan értelemben „rövid"-nek minősíthető, hogy az áramerősségek és feszültségek csupán az idő függvényeinek tekinthetők, azaz e mennyiségeknek a vezeték mentén való változása elhanyagolható.

Egy ilyen rendszer leírására a 7. § *b) γ)*-ban levezetett (7.59) matrixegyenlet szolgál, melynek együttható-matrixai a három rezgőkör ciklikus szimmetriájából következőleg az alábbi alakban írhatók:

[20] Vö. H. Geiger—K. Scheel: Handbuch der Physik. Band XVII., 357. oldal.

$$(7.75)\qquad \mathbf{L}=\begin{bmatrix} l_0 & l_1 & l_1 \\ l_1 & l_0 & l_1 \\ l_1 & l_1 & l_0 \end{bmatrix};\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix};\quad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_0} & \frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_0} \end{bmatrix}.$$

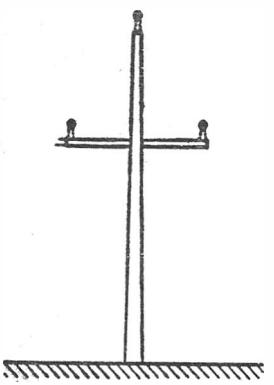
A továbbiakban feltesszük, hogy mindhárom rezgőkör elektromotoros ereje a t időnek ugyanolyan ω periódusú periodikus függvénye, tehát $\mathbf{u}(t)$ a következő alakban írható:

$$(7.76)\qquad \mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{bmatrix} e^{j\omega t}=\mathbf{u}_0 e^{j\omega t},$$

ahol u_{10}, u_{20} és u_{30} komplex mennyiségek is lehetnek. (A valóban fellépő feszültségek az $u_{10}e^{j\omega t}$ stb. valós változójú komplex függvények valós részei.) Az áramerősségeket meghatározó (valós változójú) komplex függvényeknek ugyancsak a valós része szolgáltatja a tényleg fellépő áramokat.

A 7. § *b) γ)*-ban levezetett (7.59) differenciálegyenlet jelen esetben tehát az

$$(7.77)\qquad \mathbf{L}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{i}+\mathbf{R}\frac{d}{dt}\mathbf{i}+\mathbf{K}\mathbf{i}=j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0$$



alakot nyeri. Kezdeti feltételként előírható, hogy az

$$\mathbf{i}(t)=\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix}$$

meghatározandó oszlopmatrix a $t=0$ pillanatban

$$(7.78)\qquad \mathbf{i}(0)=\begin{bmatrix} i_{10} \\ i_{20} \\ i_{30} \end{bmatrix}=\mathbf{i}_0$$

legyen. Továbbá előírható az $\mathbf{i}'(0)$ értéke a $t=0$ pillanatban:

$$(7.79)\qquad \mathbf{i}'(0)=\begin{bmatrix} i'_{10} \\ i'_{20} \\ i'_{30} \end{bmatrix}=\mathbf{i}'_0;$$

ha azonban figyelembe vesszük, hogy a vizsgálat tárgyát képező elektromágneses folyamat alapegyenlete tulajdonképpen az $\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i}+\mathbf{R}\mathbf{i}+\mathbf{K}\int_0^t \mathbf{i}\,dt=\mathbf{u}$ egyenlet, amelyben az $\int_0^t \mathbf{i}\,dt$ alsó határa rögzített, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathbf{i}'$

értéke már nem írható elő tetszés szerinti módon, hanem — az alapegyenletben szereplő integrál alsó határának zérus voltából következőleg — az $\mathbf{i}_0$ és $\mathbf{i}_0'$ között fennáll a következő összefüggés:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{i}_0' + \mathbf{R}\,\mathbf{i}_0 = \mathbf{u}_0. \tag{7.80}$$

Tehát a meghatározandó $\mathbf{i}(t)$ függvény számára az

$$\text{és} \quad \begin{cases} \mathbf{i}(0) = i_0 \\ \\ \mathbf{i}'(0) = \mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R}\,\mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_0' \end{cases} \tag{7.81}$$

kezdeti feltételek írhatók elő.

Abból a célból, hogy a megoldandó (7.77) differenciálegyenletet a 7. § *a)*-ban tárgyalt (7.29) alakú differenciálegyenletre vezethessük vissza, keressük a (7.77) differenciálegyenletnek

$$\mathbf{i} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) \tag{7.82}$$

alakú megoldását, ahol $\mathbf{A}$ a differenciálegyenlet $\mathbf{L}$ és $\mathbf{R}$ együttható-matrixaival megegyező rendszámú, egyébként tetszés szerinti előírható kvadratikus matrix, $\mathbf{y}(t)$ pedig a későbbiek során meghatározandó $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ oszlopmatrix.

A feltételezett $\mathbf{i} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t)$ megoldást a (7.77) egyenletbe helyettesítve, azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{L}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}'' + (2\mathbf{L}\mathbf{A} + \mathbf{R})\,e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}' + (\mathbf{L}\mathbf{A}^2 + \mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{K})\,e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y} = j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0. \tag{7.83}$$

Az $\mathbf{A}$ matrix értékét mármost célszerű oly módon előírni, hogy a (7.83) egyenletből az $\mathbf{y}'$-t tartalmazó tag eltűnjék. Ez nyilván akkor következik be, ha

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R}. \tag{7.84}$$

Ez esetben a (7.83) egyenletből azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{L}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\mathbf{y}'' + \left(\mathbf{K} - \frac{1}{4}\,\mathbf{R}\,\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R}\right)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\mathbf{y} = j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0. \tag{7.85}$$

Az így nyert egyenlet mindkét oldalát balról megszorozva

$$\left(\mathbf{L}\,e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\right)^{-1} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t - 1}\text{-nel},$$

adódik, hogy

$$\mathbf{y}'' + e^{\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K} - \frac{1}{4}\,\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R}\,\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\right)e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\mathbf{y} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\,\mathbf{L}^{-1}\,j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0. \tag{7.86}$$

Minthogy az $\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R}\,\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R} = (\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R})^2$ matrix az $e^{\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}$ matrixfüggvény hatványsorának bármelyik tagjával mindig felcserélhető, minthogy továbbá $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$ és

$\mathbf{K}$ ciklikus matrixok, az $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}$ matrix és az $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ matrixok is ciklikusak, és így az $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}$ matrix a ciklikus szimmetria fennállása esetén az $e^{\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}$ matrixfüggvény hatványsorának bármely tagjával ugyancsak felcserélhető, tehát a (7.86) egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{y}'' + \left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K} - \frac{1}{4}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\,\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\right)\mathbf{y} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\,\mathbf{L}^{-1}j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0. \tag{7.87}$$

Végül, bevezetve az $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K} - \frac{1}{4}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\,\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ és a $\mathbf{g}(t) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\,\mathbf{L}^{-1}j\omega e^{j\omega t}\mathbf{u}_0$ jelöléseket, a megoldandó differenciálegyenlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{g}(t). \tag{7.88}$$

Minthogy pedig a $t = 0$ pillanatban $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E}$, tehát az $\mathbf{y}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{i}(t)$ függvénynek a következő kezdeti feltételeket kell kielégítenie:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{i}_0 \tag{7.89}$$

és

$$\mathbf{y}'(0) = \mathbf{y}_0' = \frac{1}{2}\,\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\,\mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\,\mathbf{i}_0 + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{7.90}$$

A (7.88) differenciálegyenletet és a (7.89), (7.90) kezdeti feltételeket kielégítő $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0')$ függvény a (7.31) alapján:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0') = \cos\left(\sqrt{\mathbf{M}}\,t\right)\mathbf{y}_0 + \frac{\sin\sqrt{\mathbf{M}}\,t}{\sqrt{\mathbf{M}}}\,\mathbf{y}_0' + \int_0^t \frac{\sin\sqrt{\mathbf{M}}\,(t-\tau)}{\sqrt{\mathbf{M}}}\,\mathbf{g}(\tau)\,d\tau. \tag{7.91}$$

Az integrálás elvégzése és $\mathbf{y}_0$, illetve $\mathbf{y}_0'$ értékének a (7.89), (7.90) egyenletekből való behelyettesítése után, továbbá bevezetve a

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\,\mathbf{L} + \frac{1}{j\omega}\,\mathbf{K}$$

rövid jelölést, a (7.88) differenciálegyenletet és a (7.89), (7.90) kezdeti feltételeket kielégítő $\mathbf{i}(t; \mathbf{i}_0, \mathbf{i}_0')$ függvény a következő alakban írható:

$$\mathbf{i}(t; \mathbf{i}_0, \mathbf{i}_0') = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\left\{\left(\cos\sqrt{\mathbf{M}}t\right)(\mathbf{i}_0 - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\sqrt{\mathbf{M}}\,t}{\sqrt{\mathbf{M}}}\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\,(\mathbf{i}_0 - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0 + \mathbf{i}_0' - j\omega\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0\right)\right\} + e^{j\omega t}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{7.92}$$

Mint ismeretes, valamely n-ed rendű $\mathbf{C}\,(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ matrix bármely $f(\mathbf{C})$ analitikus függvénye

$$f(\mathbf{C}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \ldots, \bar{\omega}_k^{n-1}]$$

alakban állítható elő, ahol ω_k az ún. „n-edik egységgyökök" közül a k-adik, tehát például az

$$\omega_k = e^{\frac{2k\pi j}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

képlet által adottak, és λ_k a $\mathbf{C}$ matrix karakterisztikus egyenletének k-adik gyöke, mely a következő képletből számítható:

$$\lambda_k = c_0 + c_1\omega_k + c_2\omega_k^2 + \ldots + c_{n-1}\omega_k^{n-1}.$$

Jelen esetben — az ún. „harmadik egységgyökök" szokásos jelölésével — írhatjuk, hogy:

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \varepsilon, \; \omega_2 = \bar{\varepsilon};$$

$$\bar{\omega}_0 = 1, \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\varepsilon}, \; \bar{\omega}_2 = \varepsilon.$$

Jelöljük továbbá az $\mathbf{L}$ matrix k-adik sajátértékét λ_k-val, a $\mathbf{K}$ matrix k-adik sajátértékét $\varkappa_k$-val, a $\mathbf{R}$ matrix k-adik sajátértékét ϱ_k-val; akkor a fentiek alapján adódik, hogy:

$$\lambda_0 = l_0 + l_1 + l_1 = l_0 + 2l_1;$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= l_0 + l_1\varepsilon + l_1\varepsilon^2 = \\ \lambda_2 &= l_0 + l_1\bar{\varepsilon} + l_1\varepsilon^2 = \end{aligned}\right\} l_0 + l_1(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = l_0 - l_1;$$

$$\varkappa_0 = \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_0} + \frac{2}{c_1};$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1}\varepsilon + \frac{1}{c_1}\varepsilon^2 = \\ \varkappa_2 &= \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1}\bar{\varepsilon} + \frac{1}{c_1}\bar{\varepsilon}^{-2} = \end{aligned}\right\} \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1}(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1};$$

$$\varrho_0 = \varrho_1 = \varrho_2 = r.$$

A ciklikus matrixok analitikus függvényeinek fentebbi kanonikus előállításából következik, hogy amennyiben $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ megegyező rendszámú, pl. n-ed rendű ciklikus matrixok, továbbá α_k, illetve β_k e matrixok k-adik sajátértéke, akkor tetszés szerinti analitikus függvények esetén fennállanak az alábbi összefüggések:

$$f_1(\mathbf{A}) \pm f_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f_1(\alpha_k) \pm f_2(\beta_k)\right\}\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \vdots\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1, \bar{\omega}_k, \ldots, \bar{\omega}_k^{n-1}]$$

és

$$f_1(\mathbf{A})f_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_1(\alpha_k)f_2(\beta_k)\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \vdots\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1, \bar{\omega}_k, \ldots, \omega_k^{n-1}].$$

Ezekből viszont következik, hogy ha a fenti (7.92) egyenletben szereplő **M** matrix sajátértékeit μ_k-val és a **Z** sajátértékeit ζ_k-val jelöljük, akkor e sajátértékek az **L**, **K** és **R** matrixok sajátértékeiből közvetlenül, az alábbi módon nyerhetők:

$$\mu_1 = \left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c_1}\right)\frac{1}{l_0 + 2l_1} - \frac{r^2}{4(l_0 + 2l_1)^2};$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{1}{l_0 - l_1} - \frac{r^2}{4(l_0 - l_1)^2};$$

$$\zeta_1 = r + j\left[\omega_0(l_0 + 2l_1) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{c_0} + \frac{2}{c_1}\right)\right];$$

$$\zeta_2 = \zeta_3 = r + \left[j\omega_0(l_0 - l_1) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right)\right].$$

A (7.92) képletből a benne szereplő ciklikus matrixok sajátértékeinek ismeretében az alábbiakban fel fogjuk írni az $\mathbf{i}_0 = 0$, $\mathbf{i}' = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_0$ kezdeti feltételeknek eleget tevő $\mathbf{i}(t; \mathbf{i}_0\mathbf{i}_0')$ függvény kanonikus alakját. **A** (7.92) képletben $\mathbf{i}_0$ helyébe 0-t és $\mathbf{i}_0'$ helyébe $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_0$-t helyettesítve, azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{i} = \left\{-e^{-\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\left[\cos\sqrt{\mathbf{M}}\,t + \frac{\sin\sqrt{\mathbf{M}}\,t}{\sqrt{\mathbf{M}}}\left(\frac{1}{2}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Z} + j\omega\mathbf{E}\right)\right] + e^{j\omega t}\mathbf{E}\right\}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{7.93}$$

A fentebbi összefüggések alapján **i** kanonikus alakja a következő:

$$\mathbf{i} = \frac{1}{3}\left\{\frac{-e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\lambda_1}t}\left[\cos\sqrt{\mu_1}\,t + \frac{\sin\sqrt{\mu_1}\,t}{\sqrt{\mu_1}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\lambda_1} - \frac{\zeta_1}{\lambda_1} + j\omega\right)\right] + e^{j\omega t}}{\zeta_1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\right.$$

$$\cdot[1,\ 1,\ 1] + \frac{-e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\lambda_2}t}\left[\cos\sqrt{\mu_2}\,t + \frac{\sin\sqrt{\mu_2}\,t}{\sqrt{\mu_2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\lambda_2} - \frac{\zeta_2}{\lambda_2} + j\omega\right)\right] + e^{j\omega t}}{\zeta_2}\cdot$$

$$\left.\cdot\begin{bmatrix}1\\ \varepsilon\\ \varepsilon^2\end{bmatrix}[1,\ \bar{\varepsilon},\ \bar{\varepsilon}^2] + \begin{bmatrix}1\\ \bar{\varepsilon}\\ \bar{\varepsilon}^2\end{bmatrix}[1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2]\right\}\mathbf{u}_0. \tag{7.94}$$

(Ugyanis — amint fentebb kiszámítottuk — az **L**, **K**, **M**, **Z** matrixoknak kettős sajátértékei: $\lambda_2 = \lambda_3$, $\varkappa_2 = \varkappa_3$, $\mu_2 = \mu_3$, $\zeta_2 = \zeta_3$.)

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[1,\ 1,\ 1] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

továbbá, mivel $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$ és $\bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon$, tehát

$$\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\bar{\varepsilon}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\varepsilon},\ \varepsilon] + \begin{bmatrix}1\\\bar{\varepsilon}\\\varepsilon\end{bmatrix}[1,\ \varepsilon,\ \bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Ha tehát *például* a rezgőkörökre kapcsolt periodikus feszültségek egymáshoz képest mért fáziseltolása $\frac{2\pi}{3}$, azaz ha

$$\mathbf{u}_0 = U_0 \begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\bar{\varepsilon}\end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\bar{\varepsilon}\end{bmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\bar{\varepsilon}\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\bar{\varepsilon}\end{bmatrix}$$

összefüggések felhasználásával az **i** áramerősség-oszlopmatrixra azt nyerjük, hogy:

$$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix} = \frac{U_0}{r + j\left[\omega(l_0 - l_1) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right)\right]} \cdot$$

$$\cdot \left\{ e^{j\omega t} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{l_0 - l_1}t}\left[\cos\sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{1}{l_0 - l_1} - \frac{r^2}{(l_0 - l_1)^2}}\ t + \right.\right.$$

(7.95)

$$+ \frac{\sin\sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{1}{l_0 - l_1} - \frac{r^2}{(l_0 - l_1)^2}}\ t}{\sqrt{\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{1}{l_0 - l_1} - \frac{r_2}{(l_0 - l_1)^2}}} \cdot$$

$$\left.\left. \cdot \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{l_0 - l_1} - \frac{r + j\left[\omega(l_0 - l_1) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_1}\right)\right]}{l_0 - l_1} + j\omega\right)\right]\right\}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\bar{\varepsilon}\end{bmatrix}.$$

IRODALOMJEGYZÉK

I. Könyvek, összefoglaló munkák

Macduffee, C. C.: The Theory of Matrices. J. Springer, Berlin, 1933.

Kron, G.: Tensor Analysis of Networks. John Wiley & Sons, New York, 1939.

Frazer, R. A.—Duncan, W. J.—Collar, A. R.: Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations. University Press, Cambridge, 1941.

Macduffee, C. C.: Vectors and Matrices. The Mathematical Association of America, 1943.

Aitken, A. C.: Determinants and Matrices. (Ötödik kiadás.) Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1948.

Kron, G.: A Short Course in Tensor Analysis for Electrical Engineers, John Wiley & Sons, New York, 1942.

Schmeidler, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen nebst Anwendungen in Physik und Technik, Akademie-Verlag, Berlin, 1949.

Le Corbeiller, P.: Matrix Analysis of Electric Networks, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1950.

Denis-Papin, M.—Kaufmann, A.: Cours de calcul matriciel appliqué. Édition Albin Michel, Paris, 1951.

Gantmacher, F. R.: Teorija matric. Gosztehizdat, Moszkva, 1953.

Pupke, H.: Einführung in die Matrizenrechnung und ihre physikalischen Anwendungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1953.

Jung, H. W. E.: Matrizen und Determinanten, Fachbuchverlag GmBH, Leipzig, 1953.

Gröbner, W.: Matrizenrechnung. Oldenbourg, München, 1956.

Thrall, R. M.—Tornheim, L.: Vector Spaces and Matrices, John Wiley & Sons, New York, 1957.

Hohn, F. E.: Elementary Matrix Algebra. Macmillan, New York, 1958.

Valentiner, S.: Vektoren und Matrizen. (Sammlung Göschen, Band 354/354*a*) W. de Gruyter & Co, Berlin, 1958.

Zurmühl, R.: Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. (Második, átdolgozott és kibővített kiadás.) Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958. — Ennek a könyvnek a harmadik, ismételten átdolgozott kiadása „Matrizen und ihre technischen Anwendungen" címen jelent meg, ugyancsak a Springer-Verlag kiadásában 1961-ben.

Szabó, J.: A matrixszámítás és műszaki alkalmazásai. Alapfogalmak. (A Mérnöki Továbbképző Intézet előadássorozatából.) Bp. Felsőokt. Jegyzetellátó Váll., Budapest, 1959.

Neiss, F.: Determinanten und Matrizen. (Ötödik kiadás.) Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1959.

Cahen, G.: Éléments de calcul matriciel. (Második kiadás.) Dunod, Paris, 1959.

Bodewig, E.: Matrix Calculus. Interscience Publishers, New York, 1959.

Stigants, S. A.: The Elements of Determinants, Matrices and Tensors for Engineers, Macdonald, London, 1959.

Fazekas, F.: Matrixszámítás stb. (Mat. II.) Mérnöki Továbbképző Intézet, 1962.

Fazekas, F.: Általános tenzorelmélet. (Függelék a B. I—II—III. Vektoranalízis c. kötet 2. kiadásához.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1963.

Fazekas, F.: n-dimenziós lineáris és euklidesi terek. (Függelék az A. IX. Vektoralgebra stb. kötet 2. kiadásához.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.

Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.

Beckenbach, E. F.: Modern matematika mérnököknek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960. (Lásd e könyv 13. fejezetét: L. A. Pipes: Mátrixok és műszaki alkalmazásaik, 317—351 oldal.)

Bellmann, R.: Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill, London, 1960.

Marcus, M.: Basic Theorems in Matrix Theory. (National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 57.) Washington, 1960.

Promberger, M.: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der theoretischen Elektrotechnik. Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

Rózsa, P.: Matematika. (Az Országos Atomenergia Bizottság Atomtechnikai Tanfolyamán tartott előadások.) Felsőoktatási Jegyzetellátó Váll., Budapest, 1960.

Weiss, A. v.: Einführung in die Matrizenrechnung zur Anwendung in der Elektrotechnik. Oldenbourg, München, 1961.

Bajcsay, P.: Válogatott fejezetek a matematikából. (Matrixszámítás, differenciálegyenletek.) A Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványa. Felsőoktatási Jegyzetellátó Váll., Budapest, 1961.

Lovass-Nagy, V.: Bevezetés a mátrixszámítás elméletébe és elektrotechnikai alkalmazásába. (Folytatásokban megjelent az Elektrotechnika c. folyóiratban.) Elektrotechnika, *55* (1962), 367—379 old., 407—419 old., 463—474 old. 509—520 old., 552—564 old., *56* (1963) 53—68.

Gáspár, Gy.: Mátrixszámítás műszaki alkalmazásokkal. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, s.a.

II. A matrixszámítás alkalmazásaival kapcsolatos egyes részletkérdések tanulmányozásához ajánlott könyvek

Kármán, Th. v.—Biot, M.: Mathematical Methods in Engineering. Első kiadás, tizedik változatlan utánnyomás. McGraw-Hill, New York—London, 1940.

Feldtkeller, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Második kiadás. Hirzel, Leipzig, 1942.

Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.

Bulgakov, V. V.: Kolebanyija. Gosz. izd. technyikotyeoretyicseszkoj lityeraturü, Moszkva, 1954.

Cauer, W.: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Akademie-Verlag, Berlin, 1954.

Guillemin, E. A.: The Mathematics of Circuit Analysis. John Wiley & Sons, New York, 1950.

Crandall, S. H.: Engineering Analysis. A Survey on Numerical Procedures. McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1956.

Ley, B. J.—Lutz, S. G.—Rehberg, Ch. F.: Linear Circuit Analysis. McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1959

Krekó, B.—Bacskay, Z.: Bevezetés a lineáris programozásba. Közgazd. és Jogi Kiadó, Budapest, 1957.

Szarka, Z.: A mátrixszámítás kiegyenlítőszámítási alkalmazásai. A Mérnöki Továbbképző Intézet Előadássorozatából. Felsőokt. Jegyzetellátó Váll., Budapest, 1960.

Krekó, B.: Lineáris programozás. Közgazd. és Jogi Kiadó, Budapest, 1962.

Brillouin, L.: Wave Propagation in Periodic Structures, Electric Filters and Crystal Lattices. McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1946.

Fazekas, F.: A lineáris programozás szimplex módszere (Mat. III.) Mérnöki Továbbképző Intézet, 1963.

III. Magyar szerzők matrixszámítási dolgozatainak jegyzéke

BAJCSAY, P.:
— Anwendung der Matrizenrechnung zur Lösung gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten. Periodica, Elec. Eng., *3* (1959) 217—231 old.
— Anwendung der Matrizenrechnung zur Untersuchung von Systemen allgemeiner, expliziter, gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Periodica, Eng., *4* (1960) 63—82 old.

BAJCSAY, P.—LOVASS-NAGY, V.:
— The Generalization of some Relations of the Four-terminal Theory by Means of Hypermatrices. Acta Techn., *19* (1958) 293—309.
— A New Method of Applying Hypermatrices in the Theory of Multiphase Systems. Acta Techn., *21* (1958) 363—386 old.
— Ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung von Matrizendifferentialgleichungen. ZAMM *39* (1959) 8—13 old.

BALOGH, T.:
— Matrix-valued stochastical processes. Publ. Math. *8* (1961) 277—284 old.

BÉRES, E.:
— Centrálszimmetriával bíró térbeli keretek számítása hipermatrixok alkalmazásával. MKI Közl. *1* (1956) 577—592 old.

BÉRES, E.—LOVASS-NAGY, V.—SZABÓ, J.:
— Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderőinek meghatározása hipermatrixok alkalmazásával. MKI Közl. *1* (1956) 559—576 old.
— Die Berechnung räumlicher Rahmen von zyklischer Symmetrie. Der Stahlbau, *27* (1958) 281—284 old.

BOD, P.:
— Einige Bemerkungen zur Anwendung der Einsatz — Ausstoss — Analyse. II. Magy. Mat. Kongr. VI. 11. (1960).
L'analyse d'efficacité de la modernisation technique de la production (une approximation). MKI Közl. *6* (1961) 133—136 old.
Az ágazati és igazgatási rendszerű input-output-mérlegek kapcsolatáról. MKI Közl. *6* (1961) 499—504 old.

BOLGÁRFALVI, K.:
— Közvetlen szemléletes módszer a lineáris reciprok négypólusok láncmatrixának meghatározására. Magyar Híradástechnika, *12* (1961) 145—149 old.

BRÓDY, A.:
— Vállalati és népgazdasági megtakarítás. MKI Közl. *4* 1959 11—15 old.

CSÉBFALVI, K.:
— Neuere Lösungsmethode von linearen Differentialgleichungssystemen höherer Ordnung. ZAMM (1959) 357—358 old.

EGERVÁRY, J.:
— Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. MTA III. Oszt. Közl. *3* (1953) 417—458 old.
— On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions. Acta Sc. Math. *15* (1953) 1—6 old.
— On a lemma of Stieltjes on matrices. Acta Sc. Math. *15* (1953) 99—103 old.
— Stieltjesnek egy mátrixelméleti lemmájáról. Mat. Lapok *7* (1956) 271—276 old.
— On the hermitian normalform of a matrix and Sylvester's law of nullity. Publ. Math. *3* (1953) 144—149 old.
— Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszer megoldására. AMI Közl. *2* (1953) 11—32 old.
— On the contractive linear transformations of *n*-dimensional vector space. Acta Sc. Math. *15* (1954) 178—182 old.
— On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Sc. Math. *15* (1954) 211—222 old.

— Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában. AMI Közl. *3* (1954) 31—47 old.
— Über die Faktorisation von Matrizen und Ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen. ZAMM *35* (1955) 111—118 old.
— On the Application of the Matrix Theory to the Calculation of Chain-bridges. Acta Techn. *11* (1955) 241—256 old.
— A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására. AMI Közl. *3* (1954) 9—23 old.
— A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására. MTA III. Oszt. Közl. *5* (1955) 301—313 old.
— A Hunyadi—Scholtz-féle mátrixok alkalmazása a rácsos szerkezetek elméletében. AMI Közl. *3* (1954) 289—300 old.
— Auflösung eines homogenen linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen. Publ. Math. *4* (1955—56) 481—483 old.
— Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására. MKI Közl. *1* (1956) 109—122 old.
— Az inverz matrix általánosítása. MKI Közl. *1* (1956) 315—324 old.
— Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung. Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (Zürich), *16* (1956) 149—184 old.
— A függőhidak általános elméletének megalapozása és felépítése mátrixszámítás segítségével. MKI Közl. *2* (1957) 3—32 old.
— Über einige Anwendungen von Hypermatrizen, deren Blöcke vertauschbar sind. ZAMM *37* (1957) 1—2 old.
— Über eine Verallgemeinerung der Purcellschen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. Österreichisches Ingenieurarchiv *11* (1957) 249—251 old.
— Bemerkungen zum Transportproblem, MTW-Mitt. *5* (1958) 278—284 old.
— Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására. MKI Közl. *4* (1959) 15—28 old.
— On the application of matrices and hypermatrices in engineering analysis. Comptes Rendus, Mons (1958) 44—57 old.
— Über eine konstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf die Jordansche Normalform. Acta Math. *10* (1959) 31—54 old.
— On Rank-Diminishing Operations and their Applications to the Solution of Linear Equations. ZAMP *11* (1960) 376—386 old. (Posthumus dolgozat; a szerző hagyatékából sajtó alá rendezte Rózsa P.)
— Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete. Acta Math. *11* (1960) 341—361 old. (Posthumus dolgozat; a szerző hagyatékából sajtó alá rendezte Rózsa P.)

EGERVÁRY, J.—LOVASS-NAGY V.:
— Tanulmány a matrix-elméletnek lánchidak számításánál való felhasználásáról. Sokszorosította és kiadta a Közlekedés- és Postaügyi Minisztérium, 1955.
— Diskrete Modelle in der Mechanik und ihre Berechnung mit neueren Hilfsmitteln der Matrizentheorie. Sokszorosította és kiadta: Technische Universität Berlin, Lehrstuhl für Mechanik, 1958.

EGERVÁRY J.—LOVASS-NAGY V.—KOLIN L.:
— Discrete models and matrix methods in engineering mechanics. Proceedings of the Third Congress on Theoretical and Applied Mechanics. — Bangalore, India (1957) 259—276 old.

FAZEKAS, F.:
— A szabályozáselmélet néhány kérdésének matrixszámítási tárgyalása. ÉKME Tud. Közl. 1957.
— Untersuchung mit Matrizen einiger Fragen azentrischer Gebilde zweiter Ordnung. ÉMKE Tud. Közl. 1958.
— Bemerkungen über die Ableitungsmatrix und deren Invarianten. ÉKME Tud. Közl. 1958.
— Quelques formules algébriques pour la distribution des tensions dans la chaîne d' isolateur produites á l' aides du calcul matriciel. Comptes Rendus, Mons, 1959.
— Áttekintés a matrixszámítás mérnöki alkalmazásairól. ÉKME Tud. Közl. 1959.

— Some theorems about an invariancy group of parabolas produced with matrix calculus. II. Magy. Mat. Kongr. Közl. 1960.
— L' analyse du nombre critique de vibration (de rotation) de la barre (de l' arbre) aux rigiditées variables á l' aide du calcul matriciel. II. Magy. Mat. Kongr. Közl. 1960.
— Adalékok lineáris és kvadratikus mérnöki problémák korszerű elméleti vizsgálatához. Dissz. tézisek, TMB, 1960.
— Pontos algebrai formulák matrixelméleti előállítása a szigetelőlánc feszültségeloszlására. ÉKME Tud. Közl. 1960.
— Beiträge zur kleinsten kritischen Drehzahl des Rotors beiderseits mit symmetrischen, kleinmassigen, schlanken Wellenstücke von veränderlicher Steifheit. Veröff. d. I. IKM, Weimar, 1962.
— L. még a C. IV.** Matematikai programozás c. kötet Irodalomjegyzékét!

FAZEKAS, F.—SÁNDOR, I.:
— Lösung der Normalgleichungen nach einem neuen Iterationsverfahren. ÉKME Tud. Közl. 1958.
— Anwendung eines neuen rangvermindernden Verfahrens bei den Randwertaufgaben langer Kreiszylinderschalen. ÉKME Tud. Közl. 1958.

GÁSPÁR, GY.:
— Eine axiomatische Theorie der kubischen Determinanten. Publ. Math. *4* (1956) 126—130 old.
— A Laplace-féle kifejtési tétel egy új bizonyítása. MTA III. Oszt. Közl. *6* (1956) 491—496 old.
— A determinánselmélet axiomatikus megalapozása. NME Közl. *1* (1957) 281—286 old.
— Eine axiomatische Theorie der Dieudonnéschen Determinanten. Publ. Math. *6* (1959) 298—302 old.
— Determinánsok szorzástételének bizonyítása matrixok faktorizációja segítségével. NME Közl. *5* (1960) 151—153 old.

GERTLER, J.:
— Bonyolult rendszerek statikus stabilitása. Elektrotechn. *54* (1961) 449—454 old.

GYIRES, B:
— Funktionensysteme mit vertauschbaren Gramschen Matrizen. Acta Math. *1* (1949) 28—32 old.
— Darstellung symmetrischer regulärer Matrizen als Produkt von zueinander transponierten Matrizen. Acta Math. *1* (1949) 33—35 old.
— Über vertauschbare Matrizen. Acta Sc. Math. *12* (1950) 143—145 old.
— Ein Determinantensatz. Acad. Repub. Pop. Roman. Stud. Circ. Mat. *2* (1951) 463—484 old.
— Verallgemeinerung eines Determinantensatzes von J. Hunyady. Publ. Math. *2* (1952) 290—291 old.
— Über die Grenzwerte von Matrizen, die den Cauchyschen Funktionalgleichung genügen. Acta Univ. Debr. *1* (1954) 136—144 old.
— Eine Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes. Publ. Math. *4* (1955) 43—48 old.
— Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzscher Matrizen. Publ. Math. *4* (1956) 171—179 old.
— Über Determinanten, deren Elemente Integrale von Funktionen sind. Acta Univ. Debr. *3* (1956) 41—48 old.
— Über eine Verallgemeinerung des Smith'schen Determinantensatzes. Publ. Math. *5* (1957—58) 162—171 old.
— Valós függvénymatrixhoz tartozó Toeplitz-féle determinánsokról. Acta Univ. Debr. *5* (1958) 145—158 old.
— Über die Schranken der Eigenwerte von Hypermatrizen. Publ. Math. *7* (1960) 374—381 old.
— Über die Spuren verallgemeinerter Toeplitzschen Matrizen. Publ. Math.
— A generalization of a theorem of Szegő. MKI Közl. *7* (1962) 43—53 old.

JÁNOSSY, L.—LEE, ANNA—RÓZSA, P.:
— A Coulomb-szóródás paraméterének becslése fotoemulzióban végzett mérések alapján. MKI Közl. *6B* (1961) 467—497 old.

JÁNOSSY, L.—RÓZSA, P.:
— Maximum likelihood determination of the scattering constant of an emulsion track in the presence of noise. Il Nuovo Cimento, Serie X, *20* (1961) 817—835 old.

JÁRMAI, L.—SZEREDAI, E.:
— Buckling of Connected Parallel Beams. Proceedings of the Third Congress on Theoretical and Applied Mechanics — Bangalore, India (1957).
— Buckling of Connected Parallel Beams. Comptes Rendus Mons, (1958) 348—355 old.

JÁRMAI, L.:
— On the Calculation of the Heat Distribution in Arbitrary Irregular Domains by Means of the Matrix Calculus. Proceedings of the Sixth Congress on Theoretical and Applied Mechanics — Delhi (1960) C. 117—C. 124 old.

JUNG, GITTA—RÓZSA, P.—SÁRKÁNY, GY.:
— Ellenáramú szétválasztó vegyipari alapműveletek elméleti fokozatszámának meghatározásáról. MKI Közl. *2* (1957) 227—245 old.

KARSAI, K.:
— Utolsó szakaszában inhomogén transzformátortekercselés. Electrotechn. *55* (1962) 538—541 old.

KARSAI, K.—LOVASS-NAGY, V.:
— Verteilungen von Spannungen in inhomogenen Transformatorenwicklungen beim Auftreten von Stosswellen. ETZ-A *84* (1963).

KERÉNYI, D.:
— Lökőfeszültségmegoszlás számítása villamos forgógépekben. Elektrotechn. *56* (1963).

KERÉNYI, D.—LOVASS-NAGY, V.:
— Ein Beitrag zur Berechnung der Stoßspannungsverteilung in Wicklungen von rotierenden Maschinen. Arch. Elektr. *48* (1963) 225—335 old.

KREKÓ, B.:
— A magyar módszerről. Sokszorosította és kiadta a Magy. Tud. Akadémia Kibernetikai Kutató Csoportja, Budapest, 1958.

LOVASS-NAGY, V.:
— Párhuzamos vezetékekből álló rendszer elektromos tulajdonságainak leírására szolgáló parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldása a matrixszámítás segítségével. AMI Közl. *2* (1953) 457—466 old.
— Két végén felfüggesztett gerenda stabilitásának vizsgálata a mátrixszámítás segítségével. AMI Közl. *3* (1954) 49—63 old.
— Mathematical Investigation of the Stability against Lateral Buckling of a Beam Freely Suspended at Both Ends. Acta Techn. *13* (1955) 281—297 old.
— Egerváry J. hipermatrix-algoritmusának alkalmazása többfázisú transzformátorok matematikai vizsgálatára. MKI Közl. *1* (1956) 125—149 old.
— On an Application of Egerváry's Hypermatrix-algorism to the Mathematical Investigation of Polyphase Transformers. Acta Techn. *15* (1956) 261—286 old.
— A mátrixelmélet néhány újabb eredményének alkalmazása villamos transzformátorok matematikai vizsgálatára. ÉKME Tud. Ülléssz. (1955) 101—113 old.
— Investigation of polyphase electrical systems by means of the matrix calculus. Comptes Rendus Mons (1958) 369—374 old.
— Über die Lösung der Poissonschen Differenzengleichungen der Festigkeitslehre bei beliebigem Gebiet mit Hilfe der Hypermatrizenalgorithmen von E. Egerváry. ZAMM *38* (1958) 274—275 old.

— Nichtlineare Probleme der Wärmeleitung. Az 1958. márc. 24—28 közt Oberwolfachban tartott „Kolloquium über Probleme der nichtlinearen Mechanik" keretében tartott előadás. Kivonatos ismertetését l. MTW-Mitt. *5* (1958) 163 old.
— On a generalization of the method of symmetrical components by means of the matrix calculus. International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958. (A dolgozatot a szerző távolléte miatt J. H. Williamson olvasta fel.)
— On the investigation of heat conduction problems by means of discrete models and matrix methods. Proceedings of the Sixth Congress on Theoretical and Applied Mechanics — Delhi (1960) C. 85—C. 96 old.
— Über die Anwendung der Matrizenrechnung zur Berechnung zweidimensionaler Temperaturfelder. ZAMM *42* (1962) 110—119 old.
— Lökőfeszültségek hatására fellépő tranziens jelenségek vizsgálata a mátrixszámítás segítségével. Elektrotechn. *54* (1961) 337—334 old.
— A Matrix Method for Investigation of Two-Dimensional Heat-Conduction Problems. Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Ser. B, *64* (1961) 564—575 old.
— Über die Anwendung der Matrizenrechnung auf Wärmeprobleme. ZAMM *41* (Sonderheft 1961) T34—T36 old.
— Über die Anwendung der Matrizenrechnung zur Ermittlung von Stoßspannungsverteilungen in Spulenwicklungen. ZAMM *41* (Sonderheft 1961) T37—T40 old.
— Matrix Methods for the Approximate Treatment of One-dimensional Heat Conduction Problems. Journal of the Indian Mathematical Society, sajtó alatt.
— A Matrix Method of Calculating the Distribution of Transient Voltages in Transformer Windings. Proc. IEE *109C* (1962) 534—538 old. (A londoni Institute of Electrical Engineers külön is kiadta, „Institution Monograph"-ként; Monograph No. 517 S, May 1962.)
— Eine Matrizenmethode zur Untersuchung von Stosserscheinungen in eine idealisierten Transformator. Arch. Elek. *46* (1962) 398—408 old.
— A Matrix Method for Investigation of Three-Dimensional Heat-Conduction Processes in Orthotropic Solids. Proceedings of the 7th Congress on Theoretical and Applied Mechanics — Bombay (1961), sajtó alatt.
— Über die Anwendung der Matrizenrechnung zur Fehlerortung bei Stossprüfung von Transformatoren und rotierenden Maschinen. ZAMM *42* (Sonderheft 1962), sajtó alatt.
— Berechnung der Stoßspannungsverteilung auf Freileitungen und Transformatoren mit Hilfe von Matrizen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau, sajtó alatt.

LOVASS-NAGY, V.—GYŐRY, T.:
— Csatolt rezgőkörök vizsgálata a mátrixszámítás segítségével. AMI Közl. *3* (1953) 65—79 old.

LOVASS-NAGY, V.—RÓZSA, P.:
— The Matrix Analysis of Transient Voltage Distributions in Alternating Ladder Networks.

LOVASS-NAGY, V.—SZENDY, K.:
— Application of the Matrix Calculus to the Investigation of Transformers in Arbitrary Connection. Acta Techn. *16* (1957) 311—352 old.
— Mathematische Untersuchung der stationären und transienten Vorgänge in elektrischen Dreiphasenmaschinen mit Hilfe von Hypermatrizen. Periodica, Elec. Eng. *2* (1958) 229—261 old.
— Surge Phenomena in Electromagnetic Coils Analysed by Hypermatrix Methods Acta Techn. *21* (1958) 427—446 old.
— Investigation of Transient Phenomena of Electrical Networks by means of Matri Calculus. Acta Techn. *41* (1962) 269—278 old.
— Zur Behandlung von Fernleitungsverzweigungen mit Hilfe von Vierpolketten Arch. Elek. s. a.

LOVASS-NAGY, V.—SZEREDAI, E.:
— A matrixszámítás alkalmazása axiálisan nyomott rudak vizsgálatára. ÉKME Tud. Közl. *2* (1956) 21—33 old.

LEE, ANNA:
— Über einige Extremalaufgaben bezüglich endlicher Körper. Acta Math. *13* (1962) 235—244 old.
— Über permutationsinvariante Matrizen.

LITZMAN, O.—RÓZSA, P.:
— Allgemeine Behandlung primitiver idealer und nichtidealer Kristallgitter mit Anwendung der Theorie der Hypermatrizen. Physica status solidi *2* (1962) 28—14 old.

MAKAI, E.:
— A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods. I. Publ. Math. *5* (1957) 5—37 old.; II. Publ. Math. *5* (1958) 269—274 old.; III. Contigous systems. Publ. Math. *6* (1959) 204—213 old.

PETHEŐ, Á.:
— Einige Bemerkungen zur eindeutigen Lösbarkeit von linearen algebraischen Gleichungssystemen. MKI Közl. *3* (1958) 101—109.
— Eine Matrizenmethode zur Lösung linearer Differenzengleichungen. Publ. Math. *8* (1961) 277—284 old.

PETHEŐ, Á.—SCHAY, G.:
— Mathematische Diskussion der Anwendung des Hess'schen Satzes. Acta Chimica Acad. Sc. Hung. *4* (1954) 21—35 old.

RÁCZ, I.:
— Szimmetrikus szabályozási rendszerek vizsgálata. Elektrotechn. *55* (1962) 392—399 és 437—440 old.

REIMANN, J.:
— Bolyongási problémák tárgyalása mátrixelméleti módszerrel. MTA III. Oszt Közl. *10* (1960) 283—318 old.
— Matrix theoretical treatment of random walk problems. II. Magy. Mat. Kongr. (1960).

RÓZSA, P.:
— Elasztikusan kapcsolt korpuszkuláris rendszerek kis rezgéseinek vizsgálata mátrixszámítás segítségével. AMI Közl. *2* (1953) 51—82 old.
— A mátrixszámítás néhány új tételéről és azok alkalmazásáról differencia- és differenciálegyenletek megoldására. Kandidátusi disszertáció, Budapest, 1956.
— A mátrixszámítás alkalmazása rudak és lemezek statikájában. MKI Közl. *1* (1956) 593—621 old.
— Megjegyzés egy sztochasztikus mátrix spektrálfelbontásához. MTA III. Oszt. Közl. *7* (1957) 199—206 old.
— Lineáris differenciál- és differenciaegyenletek általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldásáról. MKI Közl. *2* (1957) 127—143 old.
— On some new methods of linear algebra and their applications. International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958.
— O primenyenyii kletocsnih matric v mehanyike korpuszkuljarnih szisztyem. Uszpehi matematyicseszkih nauk *14* (1959) 207—211 old.
— Über die Verallgemeinerung einer Routschen Erscheinung. ZAMM *49* (1960) 114—115 old.
— Über die Anwendung von Matrizen Hermitescher Normalform zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme. II. Magy. Mat. Kongr. 1960.

RÓZSA, P.—SÁRKÁNY, GY.:
— Ellenáramú szétválasztó vegyipari alapműveletek elméleti fokozatszámának meghatározásáról. II. rész. MKI Közl. *4* (1959) 277—298 old.

RÓZSA, P.—TASSI, G.:
— Primenyenyije tyeorii matric k raszcsotu sztatyicseszki nyeopregyelimih sztyerzsnyevih szisztyem v uprugoplasztyicseszkoj sztagyii. MKI *3* (1958) 54—62 old.
— Über die Anwendung einpaariger Matrizen bei der Lösung einer statisch unbestimmten Systems im elasto-plastischen Zustand. II. Magy. Mat. Kongr. (1960).
— Eine Matrizenmethode zur Lösung statisch unbestimmter Systeme im elastoplastischen Bereich. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, *10* (1961) 1329—1331 old.

RÓZSA, P.—VEIDINGER, L.:
— Egy huszadrendű Toeplitz-féle mátrix invertálása. MTA Számítástechnikai Központja, Tájékoztató az M-3-ról. 5 szám, 1960.

SÁNDOR, I.:
— Die Differentialgleichung der Bodenkonsolidation und Ihre Lösung mittels Matrizenkalküls. Comptes Rendus Mons (1958) 382—385 old.

SÁNDOR, I.—KÉZDI, Á.:
— Lösung der Differentialgleichung einer eindimensionalen Konsolidierung mittels Matrizenkalküls. Acta Techn. *27* (1959) 281—296 old.

SÁNDOR, I.—SZABÓ, J.:
— Raszcsot prjamougolnüh sajb. Acta Techn. *32* (1961).

SZABÓ, J.:
— A mátrixelmélet alkalmazása egyes szilárdságtani problémákat leíró parciális differenciálegyenletek közelítő megoldásánál. MKI Közl. *1* (1956) 623—631 old.
— Rugalmas támasztású többtámaszú tartók számítása mátrixok útján. Mélyépítéstudományi Szemle *6* (1956) 71—77 old.
— Tartórácsok számítása a mátrixelmélet segítségével. Mélyépítéstudományi Szemle, *6* (1956) 210—212 old.
— Stahlbeton-Trägerrostdecken. Die Bautechnik *34* (1957) 220—222 old.
— Négyfőtartós hídtartórácsok hatásfelületeinek számítása a mátrixelmélet segítségével. Mélyépítéstudományi Szemle *7* (1957).
— Application of the Matrix Theory to the Calculation of Continuous Beams. Acta Techn. *16* (1957) 175—193 old.
— Ein neues Verfahren zur unmittelbaren numerischen Lösung der Dirichletschen Randwertaufgaben. ZAMM *38* (1958).
— Application du calcul matriciel à la solution numerique de la stabilité élastique des barres droites de section variable. Comptes Rendus Mons (1958) 391—401 old.
— Die Berechnung von Brücken-Trägerrosten. Der Stahlbau *27* (1958) 141—148 old.
— Über die Auflösung der Poissonschen, biharmonischen und anderer ähnlich gebauten Differenzengleichungen mit Hilfe der Matrizenrechnung. ÉKME Tud. Közl. (1958) 9—23 old.
— Többfőtartós, kereszttartókkal merevített híd-tartórács pontos számítása. Az UVATERV Műszaki Osztályának kiadásában megjelent S-51 sz. műszaki segédlet, Budapest, 1958.
— Orthotrop acél-pályalemezek egyszerűsített számítása. Az UVATERV Műszaki Osztályának kiadásában megjelent S-70 sz. műszaki segédlet, Budapest, 1958.
— Ein Matrizenverfahren zur Berechnung von orthopropen stählernen Fahrbahnplatten. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, *9* (1960) 671—679 old.

— Mit Hilfe der kanonischen Form der Matrixfunktionen vorteilhaft zu behandelnde Aufgaben auf dem Gebiet der Statik und der Festigkeitslehre. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, *10* (1961) 1361—1327 old.

SZABÓ, J.—BÉRES, E.:

— Változó keresztmetszetű rudak kihajlása. Mélyépítéstudományi Szemle, *8* (1958).

— Über die Stabilität des Gleichgewichts gedrückter Stäbe mit veränderlichem Querschnitt. Acta Techn. *28* (1960) 73—86 old.

SZENDY, K.:

— Háromfázisú váltakozó áramú rendszer transzformációjának elmélete. Villamosipari Kutatási Bizottság 11. sz. kiadványa, 1953.

— Hálózatszámítás mátrixok segítségével. Elektrotechn. *50* (1957) 281—293 old.

— Erőművek gazdaságos teherelosztása a hálózati veszteségek figyelembevételével. Elektrotechn. *51* (1958) 445—451 old.

— Transformation of a Three-phase Alternating-current System with the Aid of Matrix Calculus. Acta Techn. *19* (1958) 379—403 old.

— Matrix Calculus to Transient Analysis of Electrical Networks. Comptes Rendus Mons (1958) 402—408 old.

— The extension of Calvaer's method for network calculation. Revue E, *2* (1958) N° 8. 1—6 old.

— Determination of the Electrical Interconnection Requirements by Probability Methods. Acta Techn. *27* (1959) 385—397 old.

— Simple and Generalized Method for Developing the Incremental Transmission Losses. Acta Techn. *34* (1961) 421—435 old.

— Economical Loading of Networks Connected Parallel on two Operating Voltages. Acta Techn. *38* (1962) 423—429 old.

TASNÁDY, I.:

— Megjegyzések Egerváry J.: „A matrix-elmélet alkalmazása láncháznak számítására" c. dolgozatához. AMI Közl. *3* (1954) 25—30 old.

TASSI, G.—RÓZSA, P.:

— Rugalmas-plasztikus állapotú statikailag határozatlan rúdszerkezetek számítása a mátrixelmélet alkalmazásával. ÉKME Tud. Közl. *4* (1958) No. 2. 21—43 old.

VÁMOS, T.—GERTLER, J.:

— Hálózati veszteségszámítási módszerek közelítései és egyes hálózati változások hatásának számítása. VILLENKI (Villamos Energetikai Kutató Intézet) 348 sz. kiadványa, Budapest, 1961.

IV. Külföldi szerzők dolgozatai

(Tárgykör szerint csoportosítva)

1. MATRIXOK SAJÁTÉRTÉKEINEK ÉS SAJÁTVEKTORAINAK KÖZELÍTŐ KISZÁMÍTÁSÁVAL FOGLALKOZÓ CIKKEK

Wielandt, H.: Einschliessung von Eigenwerten Hermitescher Matrizen nach dem Abschnittsverfahren. Archív der Mathematik, *5* (1954) 108—114 old.

Heinrich, H.: Zur Eingrenzung der charakteristischen Zahlen einer beliebigen Matrix. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, *6* (1956/57) 211—216 old.

Laasonen, P.: A Ritz Method for Simultaneous Determination of Several Eigenvalues and Eigenvectors of a Big Matrix. Annales Academicae Scientiarum Fennicae, Ser. A. I. Mathematica, 265. Helsinki, 1959.

2. AZ INVERZ MATRIX KISZÁMÍTÁSÁNAK PROBLÉMÁIT TÁRGYALÓ DOLGOZATOK

Schulz, G.: Iterative Berechnung der reziproken Matrix. ZAMM *13* (1933) 57—59 old.

Stenker, H.—Sieber, N.: Ein Reduktionssatz über Umkehrmatrizen und seine Anwend ung auf ein Beispiel aus der Statik. Wissenschaftliche Zeitschr. der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, *6* (1958/59) 105—117 old.

Hestenes, M. R.: Inversion of Matrices by Biorthogonalization and Related Results. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, *6* (1958) 51—90 old.

Converti, V.: Application of Row-by-Row Matrix Inversion to Power System Problems. AIEE Trans. *78 III.* (1959) 413—416 old.

Bruce Shipley, R.—Coleman, D.: A New Direct Matrix Inversion Method. AIEE Trans. *78 I.* (1959) 568—572 old.

Ansorge, R.: Uber ein Iterationsverfahren von G. Schulz zur Ermittlung der Reziproken einer Matrix. ZAMM, *39* (1959).

Sato, N.: Digital Calculation of Network Inverse and Mesh Transformation Matrices. AIEE Trans. *79 III.* (1960) 719—726 old.

3. A HIPERMATRIXOKKAL KAPCSOLATOS KÉRDÉSEKET TÁRGYALÓ MUNKA

Afriat, S. N.: Composite Matrices. The Quart. Journal of Mathematics Oxford *5* (1954) 81—98 old.

4. DIFFERENCIAEGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA A MATRIXSZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

Karlquist, O.: Numerical Solution of Elliptic Difference Equations by Matrix Methods. Tellus *4* (1952) 374—384 old.

5. A MATRIXSZÁMÍTÁS MECHANIKAI ÉS SZILÁRDSÁGTANI ALKALMAZÁSAI

Duncan, W. J.—Collar, A. R.: A Method for the Solution of Oscillation Problems by Matrices. Phil. Mag. S. 7., *17* (1934) 865—909 old.

Duncan, W. J.—Collar, A. R.: Matrices applied to the Motions of Damped Systems. Phil. Mag. S. 7. *19* (1935) 197—219 old.

Pestel, E.: Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken. Abhandlungen der Braunschw. Wissenschaftl. Gesellschaft, *6* (1954) 227—242 old.

Argyris, J. H.: Die Matrizentheorie der Statik. Ing. Arch. *25* (1957) 174—192 old. (E dolgozat irodalomjegyzékében 64 olyan cikk van felsorolva, amely statikai problémákat a matrixszámítás segítségével old meg.)

Possner, L.: Berechnung der Stabbiegung mit Matrizen. Wiss. Z. Ilmenau, *3* (1957) 43—50 old.

Falk, S.: Die Biegeschwingungen ebener Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knoten. Abhandlungen der Braunschw. Wissenschaftl. Gesellschaft, *9* (1957) 1—17 old.

Falk, S.: Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren. Ing. Arch. *26* (1958) 61—80 old.

Pestel, E.—Schumpich, G.—Spierig, S.: Berechnung rotierender Scheiben mit Hilfe von Übertragungsmatrizen. VDI-Berichte, *30* (1958) 55—63 old.

Pestel, E.—Schumpich, G.—Spierig, S.: Katalog von Übertragungsmatrizen zur Berechnung technischer Schwingungsprobleme. VDI-Berichte, *35* (1959) 11—28 old. (Felhívjuk az olvasó figyelmét a dolgozat irodalomjegyzékére.)

Fuhrke, H.: Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. Ing.-Arch. *23* (1955) 329—348 old.

Fuhrke, H.: Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. Ing.-Arch. *24* (1956) 27—42 old.

Marguerre, K.: Matrices of Transmission in Beam Problems. Progress in Solid Mechanics, Volume I. Edited by I. N. Sneddon and R. Hill. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.

Inan, M.: The Carry-over Matrix in Elastomechanics. Istanbul Teknik Üniversitesi Bülteni, *14* (1961) 61—81 old.

6. A MATRIXSZÁMÍTÁS ELEKTROTECHNIKAI ALKALMAZÁSÁNAK ALAPPROBLÉMÁIVAL FOGLALKOZÓ CIKKEK

Risley, N. S.—Burington, R. S.: A Matrix Theory Development of the Theory of Symmetric Components, Phil. Mag. *21* (1939) 604—613 old.

Quade, W.: Matrizenrechnung und elektrische Netze. Arch. Elek. *34* (1940) 545—567 old.

Kneissler-Maixdorf, L.: Einführung in die Anwendung der Matrizenrechnung auf quasistationäre Wechselstromvorgänge. E u M, *58* (1940) 308—311. old.

Messerle, H. K.: Dynamic Circuit Theory. AIEE Trans. *79 III.* (1960) 1—12 old.

7. A MATRIXSZÁMÍTÁS ALKALMAZASA VILLAMOS VEZETÉKEKKEL ÉS HÁLÓZATOKKAL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁRA

Pipes, L. A.: The Matrix Theory of Four-Terminal Networks. Phil. Mag. Ser. 7. *30* (1940) 370—395 old.

Vowels, R. E.: Matrix Methods in the Solution of Ladder Networks. The Journal of the IEE, *95 III.* (1948) 40—50 old.

Shen, D. W. C.: Synthesis of the Uniform Transmission Line. Electronic Engineering, *25* (1953) 287—289 old.

Zimmermann, F.: Berechnung knotenpunktsbelasteter Maschennetze mit Matrizen. ETZ-A, *11* (1953) 45—50 old.

Zimmermann, F.: Berechnung zweifach gespeister Drehstrom-Unsymmetriefehler mit Matrizen. E u M, *71* (1954) 433—438 old.

Lewis, W. E.—Banks, J. H.: Matrix Methods for the Evaluation of Simultaneous Faults in Three-Phase Systems. Proc. IEE *102 C* (1955) 231—243 old.

Pipes, L. A.: Certain Applications of Matrices to Circuit Theory. Communication and Electronics (1958).

Weiss, A. v.: Das Maschenverfahren zur Berechnung linearer Maschennetze mit und ohne Knotenpunktsbelastung. Arch. Elek. *43* (1958) 374—384 old.

Furkert, W.: Die Berechnung elektrischer Netze, dargestellt als Matrizenoperation. Wiss. Z. Ilmenau, *5* (1959) 157—162 old.

Edelmann, H.: Allgemeine Grundlagen der Netzberechnung mit Inzidenzmatrizen. Arch. Elek. *44* (1959) 419—440 old.

Bryant, P. R.: The Algebra and Topology of Electrical Networks. Proc. IEE, *108 C,* (1961) 215—229 old. (Külön is felhívjuk az olvasó figyelmét a dolgozat részletes irodalomjegyzékére.)

Schaller, D.: Berechnung elektrischer Netze bei verändertem Schaltzustand. Wiss. Z. Ilmenau, *7* (1961) 141—148 old.

Gaussens, P.—Pardigon, J.—Augès, P.—Augé, J.: L'évolution des methodes de calcul des réseaux maillés liées à l'utilisation des machines arithmétiques. Bulletin de la Société Française des Électriciens. 8 Série, *2* (1961).

Weiss, A. v.: Das Knotenpunktsverfahren in Matrizenform zur Berechnung linearer Maschennetze und seine Praktische Anwendung. Arch. Elek. *47* (1962) 29—41 old.

Brameller, A.—Denmead, J. K.: Some Improved Methods for Digital Network Analysis, Proc. IEE, *109 A* (1962) 109—116 old.

8. A MATRIXSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA TRANSZFORMÁTOROK ÉS VILLAMOS FORGÓGÉPEK VIZSGÁLATÁRA

Frauenberger, F.: Beitrag zur Theorie von Dreiphasentransformatoren ohne Nulleiterstrom im stationären Betrieb, und bei einschwingsvorgängen. E u M, *58* (1940) 293—304 old.

Banks, J. H.: Multiple Fault Analysis of Delta-Star Transformer Banks. Proc IEE. *102 A.* (1955) 833—843 old.

Kucera, J.: La théorie du transformateur dans l'analyse tensorielle. Revue Générale de l'Électricité, *66* (1957) 279—291 old.

Akhunlar, A.: Behandlung der Ausgleichvorgänge in Drehstrom-Asynchronmotoren mit Hilfe von Park-Transformation, Laplace-Transformation und Matrizenrechnung. Arch. Elek. *42* (1956) 223—236 oldal.

Mayer, D.: Die Behandlung der elektromechanischen Übergangserscheinungen in der Theorie der elektrischen Maschinen mittels Tensorrechnung. Arch. Elek. *42* (1956) 331—350 old.

Lynn, J. W.: The Tensor Equations of Electrical Machines. Proc. IEE, *102 C* (1955) 149—167 old.

Laible, Th.: Spannungsänderungen eines Synchrongenerators beim Zu- und Abschalten von Blindlast und langen Leitungen. Bulletin Oerlikon, Nr. 340 (1960) 58—67 old

Hannakam, L.: Entwicklung geschlossener Näherungsbeziehungen für unsymmetrische Kurzschlüsse des synchronen Schenkelpolmaschine. Arch. Elek. *43* (1960) 118—156 old.

Canay, M.: Allgemeine Theorie der Synchron- und Asynchronmaschinen in der Operator-Matrix-Darstellung. Arch. Elek. *46* (1961) 83—102 old.

9. HŐVEZETÉSI PROBLÉMÁK VIZSGÁLATA MATRIXOKKAL

White, G. W. T.: On the Use of Matrices for Solving Periodic Heat Flow Problems. Applied Scientific Research Delft A *6* (1957) 433—444 old.

10. A MATRIXSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA A KÉMIÁBAN

Possner, L.: Anwendung der Matrizen auf die Mischungsrechnung. Wiss. Z. Ilmenau *5* (1959) 9—13 old.

A folyóiratok címeinek megadásánál alkalmazott rövidítések

Acta Math. = Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Acta Sc. Math. = Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, Bolyai Intézet
Acta Univ. Debr. = Acta Universitatis Debreceniensis, Debrecen, Kossuth L. Tudományegyetem
Acta Techn. = Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae
AIEE Trans. = American Institution of Electrical Engineers Transactions
AMI Közl. = A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei
Arch. Elek. = Archiv für Elektrotechnik

Comptes Rendus Mons = Comptes Rendus du Congrès International Les Mathématiques de l'Ingénieur, Mons et Bruxelles, 1958

35. *Fazekas Ferenc:* Gyárüzemek optimális telephelykiválasztása (3—4. rész). — Ipari munka, 1962.

36. *Fazekas Ferenc:* Mellékletek „A lineáris programozás matematikai segédeszközei és módszerei" c. előadássorozathoz. — ÉKME programozási tanfolyama, 1962—63.

37. *F. Fazekas:* Recoursing Formulas for Mathematcal Programming. — Bolyai Társulat Kollokviuma, 1963; sajtó alatt.

38. *F. Fazekas:* Algorithmen zu mathemetischen Programmierungsproblemen.. — DDR. Mat. Társ. Tud. Ülése, Weimar, 1963; sajtó alatt.

39. *I. M. Gelfand:* Előadások a lineáris algebráról. (Ford. oroszból). — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

40. *Jándy Géza:* Kvadratikus programozás a közlekedésben, — Közl. tud. Koll., 1961; ÉKME Tud. Közl.

41. *Fazekas Ferenc:* A matematikai programozás Lagrange-feladatai és más speciális kérdései, műszaki vonatkozásokkal. — II. Kibernetikai Konferencia, Budapest, 1964.

42. *Fazekas Ferenc:* Matematikai programozás. — Előadássorozat a Mérnöki Továbbképző Intézetben, 1964.

43. *F. Fazekas:* Über nichtlineare, besonders quadratische Programmierung, in Verbindung gewisser elektrischer Netze. — 5. Verkehrswiss. Tage, Dresden, 1964.

44. *Fazekas Ferenc:* Statisztikai döntések az ipari tervezésben. — Bolyai Társulat Kollokviuma, 1964.

45. *F. Fazekas:* Beiträge zu gewissen mathematischen Optimierungsproblemen. — Jahrestagung der Math. Gesell. d. DDR, Karl-Marx-Stadt, 1964.

46. *Fazekas Ferenc:* A matematikai programozás speciális módszerei és problémái. — Előadássorozat a Mérnöki Továbbképző Intézetben, 1964. őszén.

47. *F. Fazekas:* Lagrangesche Aufgaben und rekursive Verfahren in der mathematischen Programmierung. — Wiss. Tagung über Math. u. Kybernetik, Berlin, 1964.

48. *Fazekas Ferenc:* Adalékok a lineáris, az integer, a kvadratikus programozáshoz és közlekedési vonatkozásaikhoz. — Kand. disszertáció.

A kiadásért felelős: a Tankönyvkiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Lojd Lajos
Műszaki szerkesztő: Drexler Alajos
A kézirat nyomdába érkezett: 1976. augusztus. Megjelent: 1976. december
Példányszám: 1500. Terjedelem: 21,3 (A/5) ív
Készült: az 1972 évi negyedik kiadás alapján, álló filmről fotózva,
íves ofszetnyomással a Dabasi Nyomdában, az MSZ 5601—59 és
az MSZ 5602—55 szabvány szerint
Raktári szám: 44 331/IV.

76-1930 — Dabasi Nyomda, Budapest — Dabas
Felelős vezető: Földes György igazgató